Tema 2: Figuras geométricas

* En este tema empezaremos a estudiar:
  1. la circunferencia.
  2. los triángulos.
  3. los cuadriláteros.
  4. los polígonos.

La circunferencia (p. 31)

* El cerebro humano es muy bueno reconociendo formas. Al acabar educación infantil, los niños identifican perfectamente la forma circunferencia.

* Para avanzar en su estudio, y en su relación con otros objetos geométricos, necesitamos una definición.

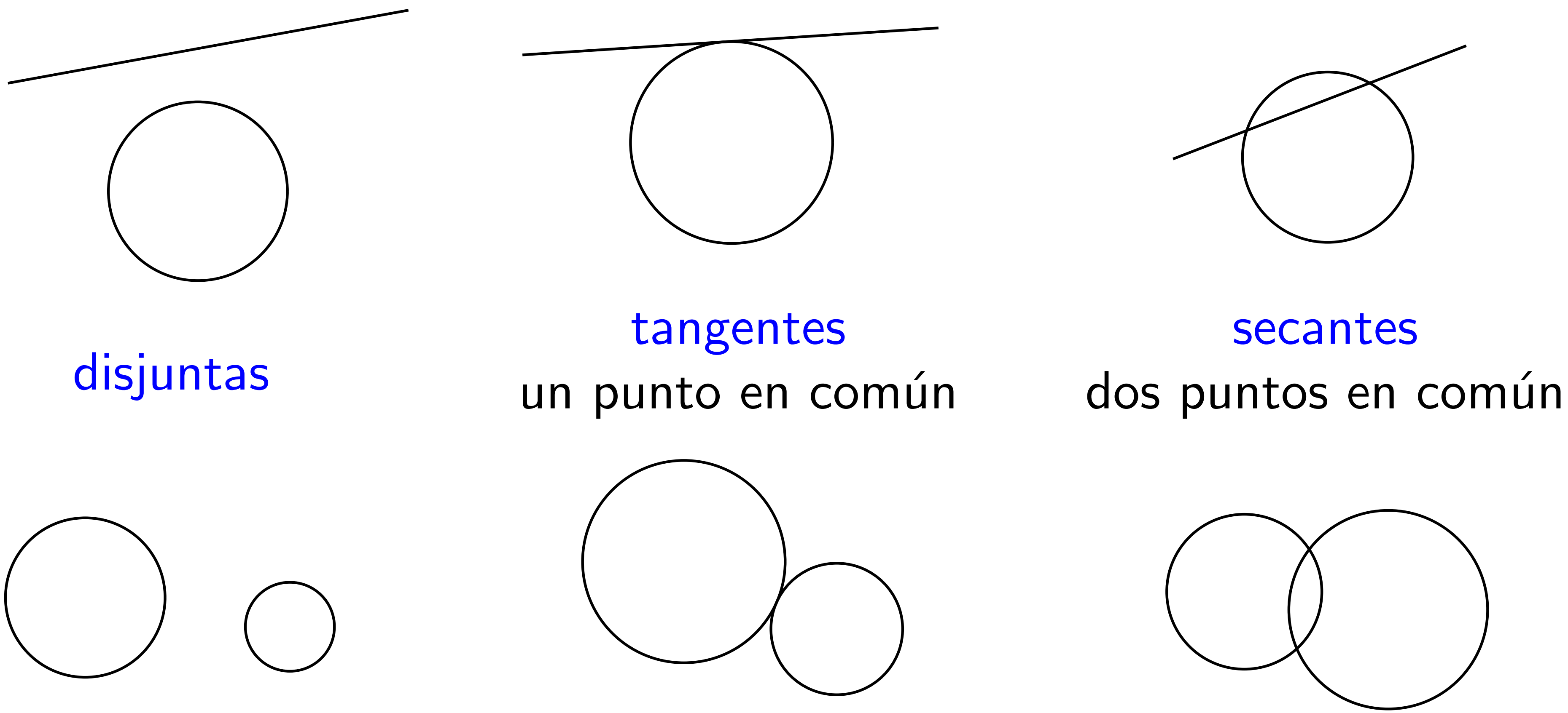
* Definición: La circunferencia de centro el punto C y radio r es el conjunto de puntos que están a distancia r de C.

* Una propuesta didáctica para descubrir la definición:
  1. Se divide a la clase en grupos de trabajo.
  2. Se pide a cada niño que, en una transparencia (o papel transparente) dibuje un punto C y varios puntos a distancia dada (por ejemplo, 6 cm) de C.
  3. Se superponen las transparencias de los niños de cada grupo (haciendo coincidir C).

La circunferencia

* No en primer ciclo, pero sí en 4º o 5º curso, el siguiente paso debe ser adquirir destreza en el uso del compás.

* Posiciones relativas de recta y circunferencia, y de dos circunferencias:



Triángulos (p. 36)

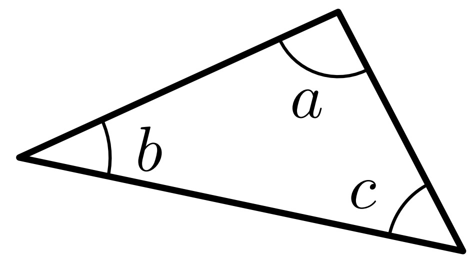
* Como con cada objeto geométrico, podemos considerar dos niveles:
  * en Infantil y Primer ciclo, un triángulo se "reconoce por su aspecto".
  * más adelante, es conveniente disponer de una definición precisa.

* Podemos encontrar varias posibles definiciones de triángulo (en particular, algunas incluyen el interior y otras no). Lo importante es saber reconocer, y manejar, una buena definición.

* Definición: Un triángulo es la región del plano delimitada por los 3 segmentos definidos por 3 puntos no colineales.

Suma de los ángulos de un triángulo

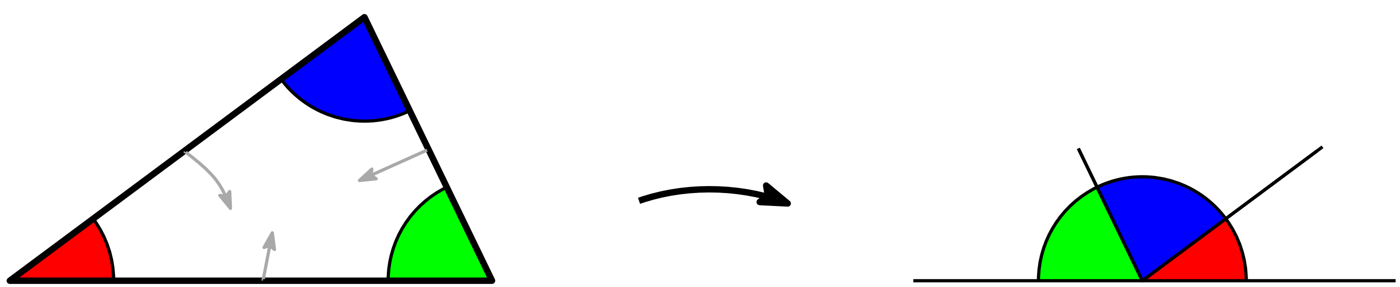
* Propiedad: La suma de los tres ángulos de cualquier triángulo es $180°$.



$$a + b + c = 180°$$

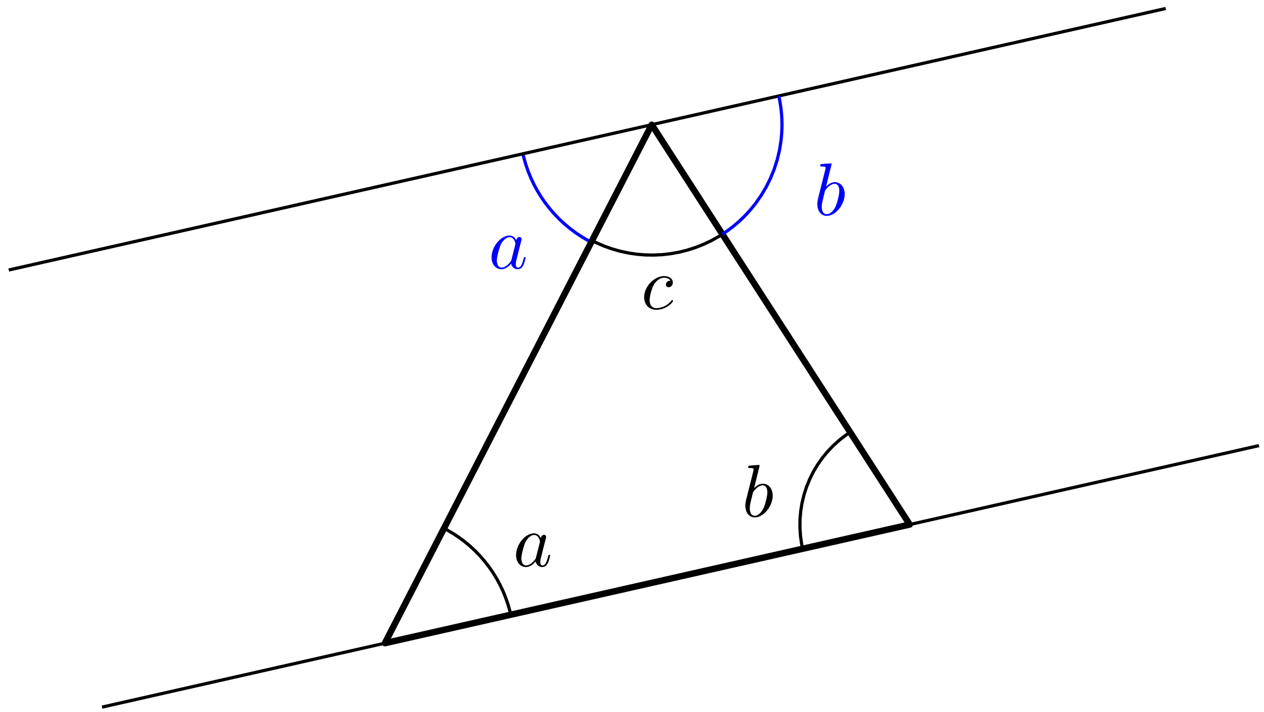
* Este es uno de los hechos básicos en geometría y es esencial dar argumentos que muestren que siempre es cierto.

* Veamos dos:
  1. El primero, quizá mas intuitivo y basado en materiales:



Suma de los ángulos de un triángulo

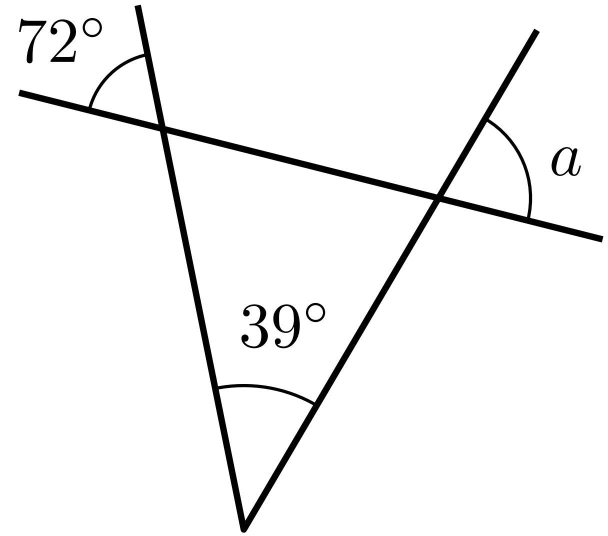
2. El segundo, más abstracto. Ya es una demostración.
   ¿Adecuado para primaria?



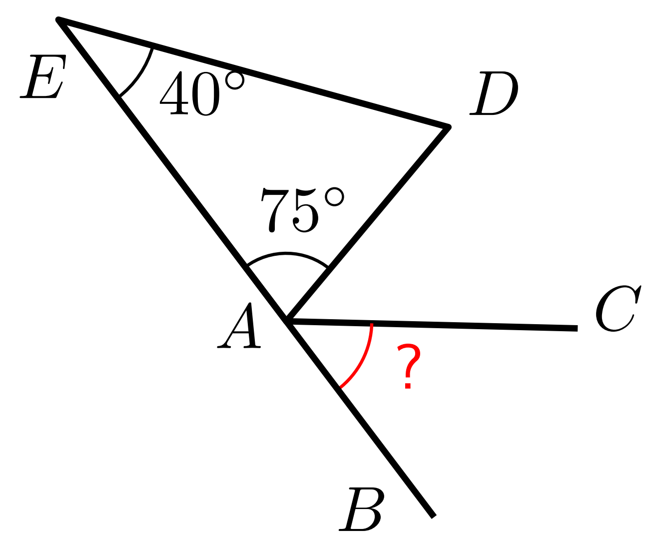
$$a + b + c = 180^\circ$$

Problemas

* ¿Cuánto mide el ángulo a de la figura?



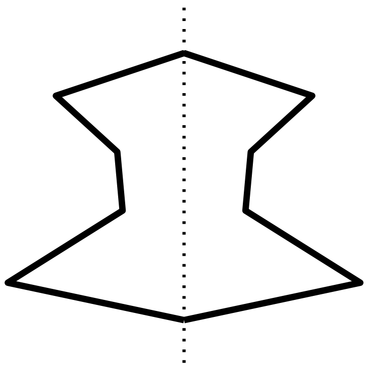
* Sabiendo que AC es la bisectriz del ángulo $\angle BAD$, calcula cuánto mide el ángulo $\angle BAC$. (Los puntos E, A y B son colineales).



Triángulos y simetría

* La simetría es un concepto sencillo de entender, y nos permitirá avanzar en el estudio de las figuras geométricas.

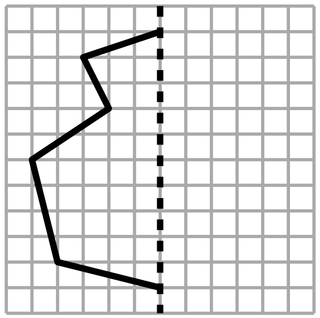
* Una línea de simetría divide a un objeto en dos partes "iguales".



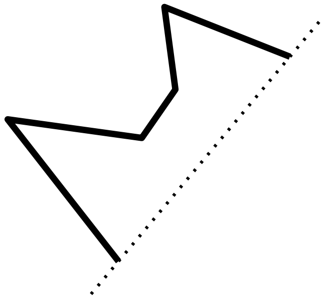
* Algunas sugerencias para familiarizarse con el concepto:
  * construir objetos simétricos haciendo recortables.
  * la simetría está "por todas partes".

Simetría

∗ Ejercicio típico en los libros:



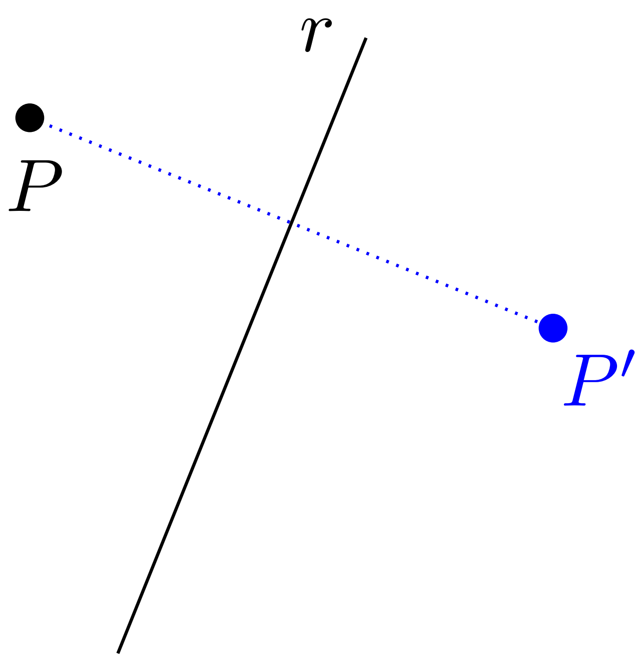
∗ Ojo: la recta de simetría puede no ser ni vertical ni horizontal.



∗ Hay figuras con más de una recta de simetría.

- ⋆ ¿Una figura con dos rectas de simetría?
- ⋆ ¿Una figura con cuatro rectas de simetría?
- ⋆ ¿Una figura con infinitas rectas de simetría?

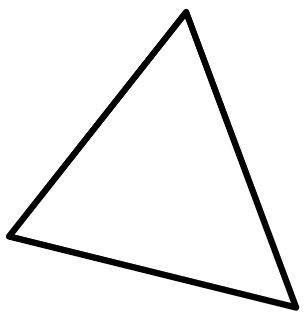
Una definición precisa



El simétrico de un punto P respecto de la recta r es el punto que está en la perpendicular a r que pasa por P y que está a la misma distanca de r que P.

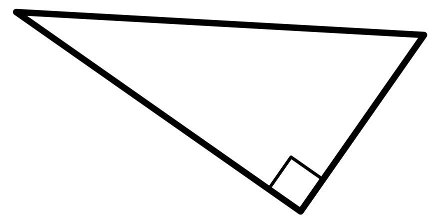
Tipos de triángulos (p. 43)

Según sus ángulos



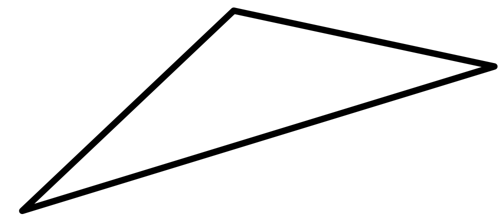
triángulo acutángulo

todos sus ángulos agudos



triángulo rectángulo

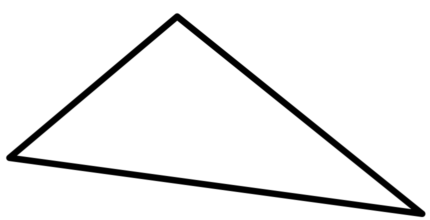
un ángulo recto



triángulo obtusángulo

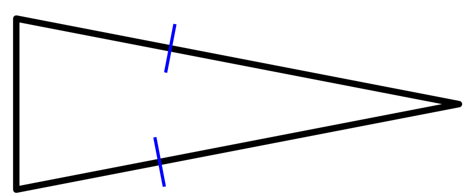
un ángulo obtuso

Según sus lados



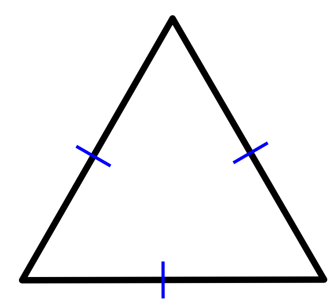
triángulo escaleno

los tres lados de distinta longitud



triángulo isósceles

al menos dos lados iguales

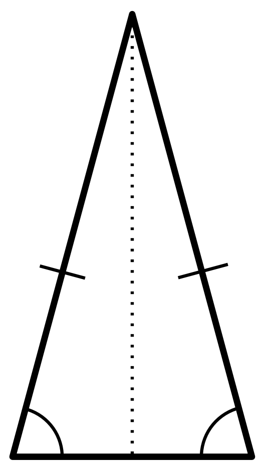


triángulo equilátero

los tres lados iguales

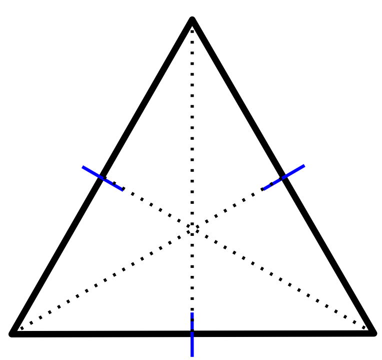
Triángulos isósceles y equiláteros

* Los hemos definido en términos de sus lados.



* En un triángulo isósceles los ángulos definidos por cada lado igual y el tercer lado son iguales.

* El recíproco también es cierto: un triángulo que tiene dos ángulos iguales siempre es isósceles.

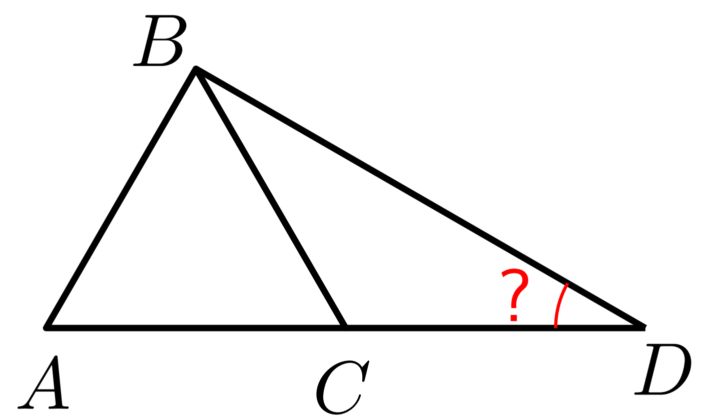


* Un triángulo equilátero tiene los tres ángulos iguales.

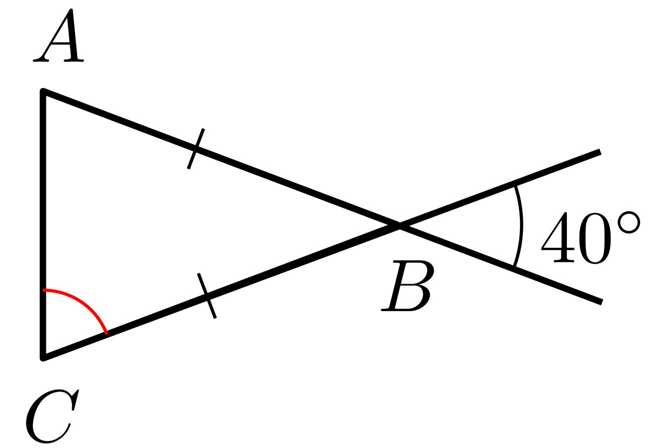
* El recíproco también es cierto: los triángulos que tienen los tres ángulos iguales son equiláteros.

Problemas

* Sabiendo que $|AB| = |AC| = |BC| = |CD|$, calcula la medida del ángulo $\angle CDB$.



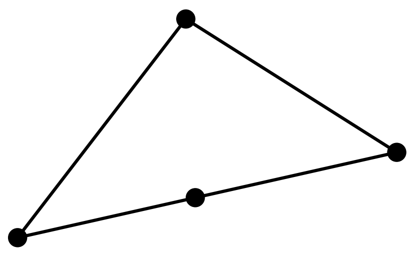
* Calcula la medida del ángulo $\angle ACB$ de la figura.

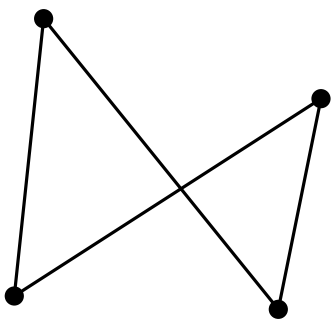


Cuadriláteros (p. 45)

* La idea intuitiva ya está clara en el primer ciclo.

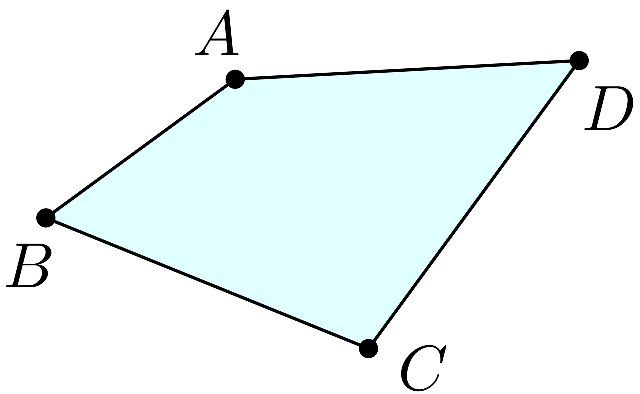
* ¿Son cuadriláteros?





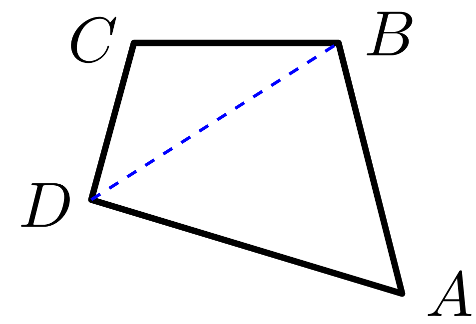
* Un cuadrilátero está formado por 4 puntos distintos A, B, C, D (no hay 3 colineales) y cuatro segmentos AB, BC, CD, DA, que no tienen puntos en común, excepto los extremos.

* Dependiendo del contexto, el interior también puede considerarse parte del cuadrilátero.

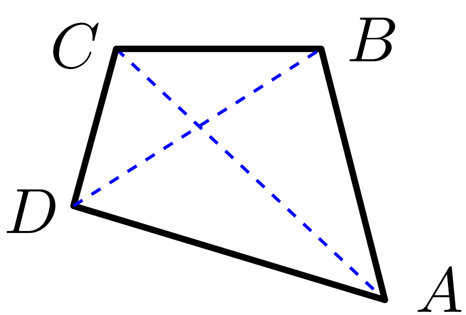


Tipos especiales de cuadriláteros

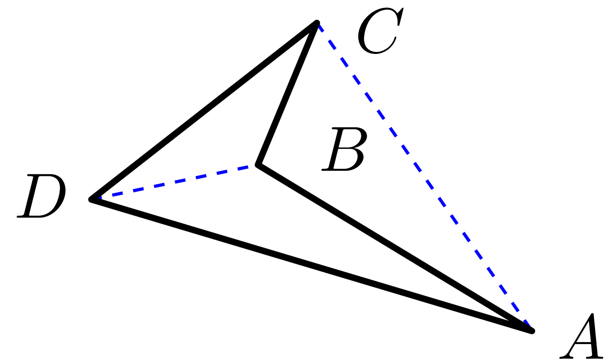
* Una diagonal es un segmento entre vértices no consecutivos.



* Un cuadrilátero es convexo si sus dos diagonales están en el interior del polígono. En otro caso, se dice que el cuadrilátero es no convexo.



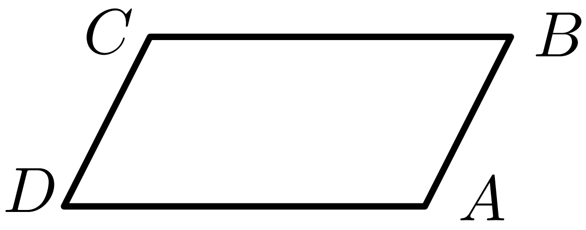
convexo



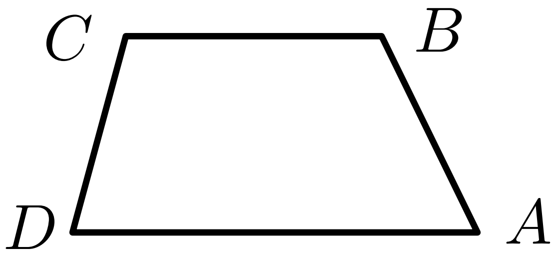
no convexo

* Obs: La suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°

Tipos especiales de cuadriláteros



∗ Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.



∗ Un trapecio es un cuadrilátero con dos lados paralelos (y los otros dos no).

∗ Si los dos lados no paralelos tienen la misma longitud, el trapecio es isósceles.

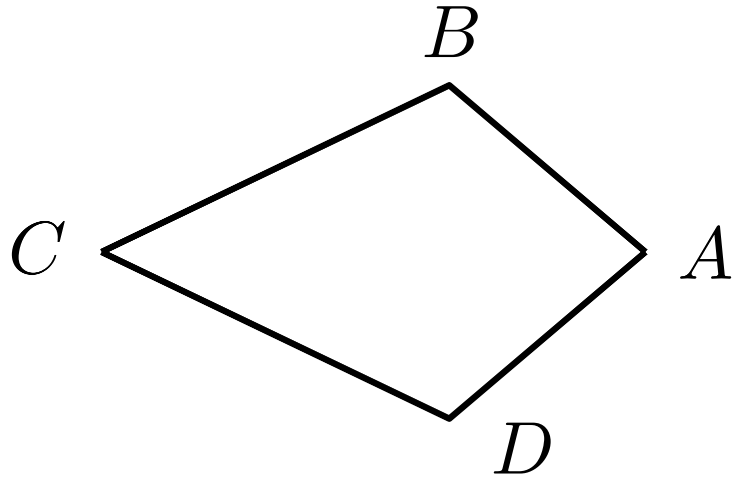
∗ Un trapezoide es un cuadrilátero sin lados paralelos (puede ser convexo o no).

Terminología

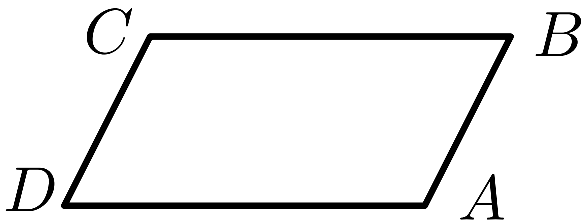
* La terminología en EGT (que es la usual en EEUU) es un poco diferente.

  Un trapecio se llama en el libro *trapezoid*, y no existe un término especial para el *trapezoide* español.

* Definen además otro tipo de cuadrilátero, que llaman *kite* (cometa). Nosotros lo introduciremos en la hoja de problemas.

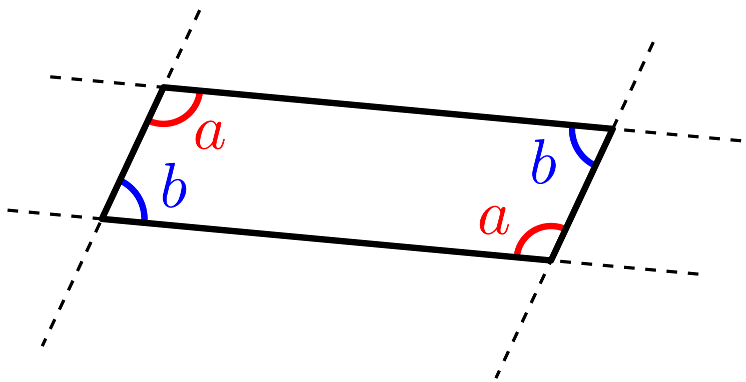


Paralelogramos



* Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.

Ángulos de un paralelogramo

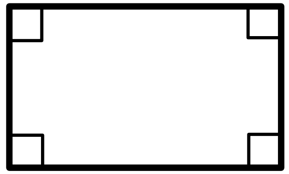


$$\boxed{a + b = 180^\circ}$$

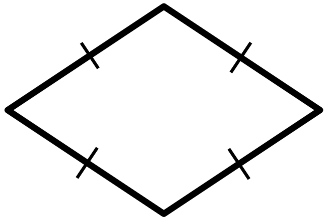
* En cualquier paralelogramo, los ángulos opuestos son iguales, y los ángulos consecutivos son suplementarios.

Clasificación de los paralelogramos

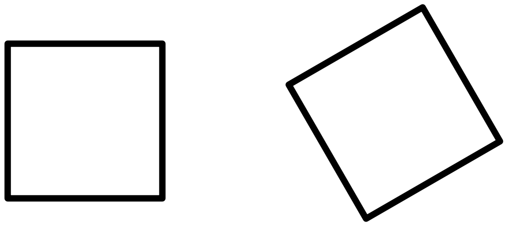
* Un rectángulo es un paralelogramo en el que sus cuatro ángulos son rectos.



* Un rombo es un paralelogramo con los cuatro lados iguales.



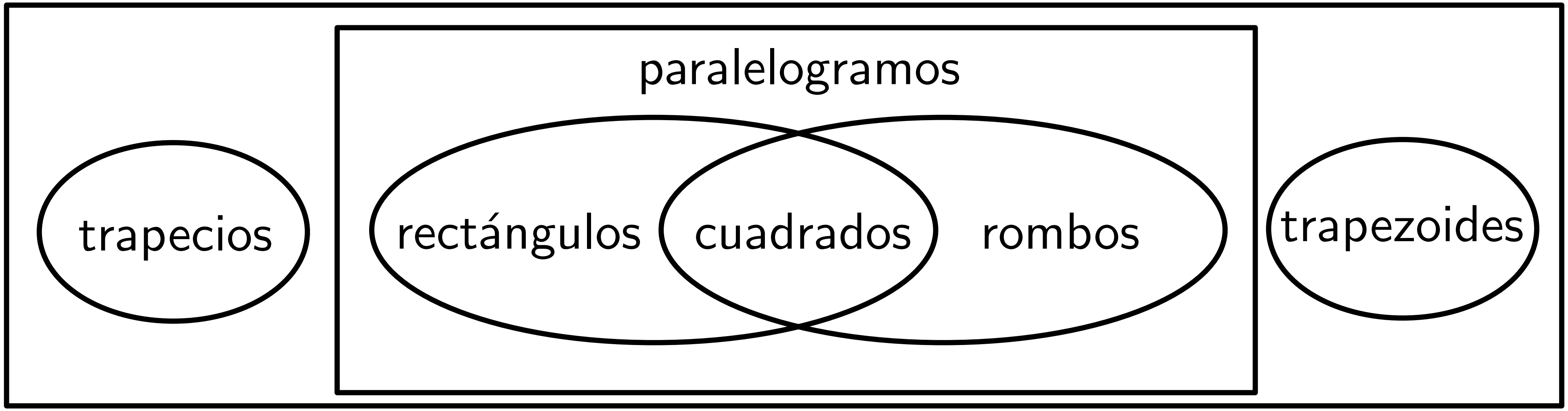
* Un cuadrado es un paralelogramo que es a la vez un rectángulo y un rombo.



* Un romboide es un paralelogramo que no es ni rectángulo ni rombo.

Cuadriláteros: clasificación

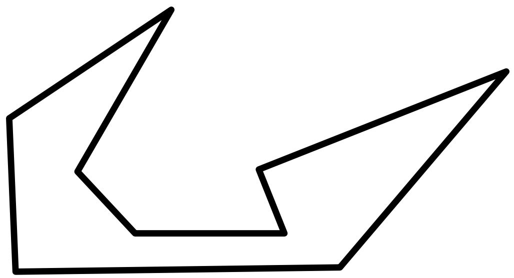
Cuadro resumen



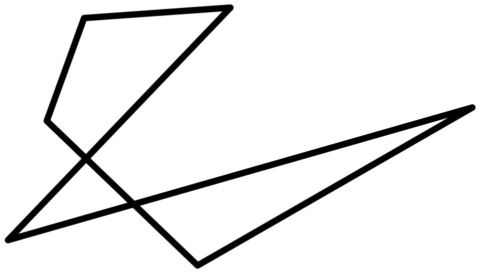
* **Obs:** Esta no es la clasificación que se utiliza normalmente en primaria. Por ejemplo, un cuadrado no es un rectángulo "especial".

Polígonos (p. 67)

* La idea de polígono de n lados es sencilla de introducir de manera informal.



polígono (de 9 lados)

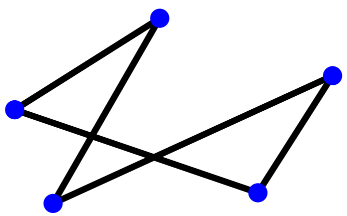


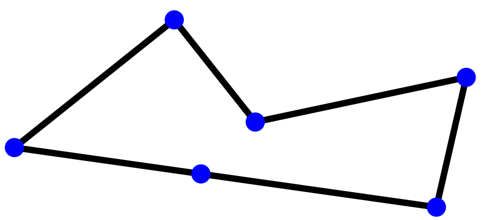
NO es un polígono

* Definición: Dados $n \geq 3$ puntos distintos $P_1, P_2, \ldots, P_n$, una línea poligonal cerrada es el conjunto de segmentos

$$P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-1}P_n, P_nP_1$$

Los puntos son los vértices y los segmentos los lados o aristas.

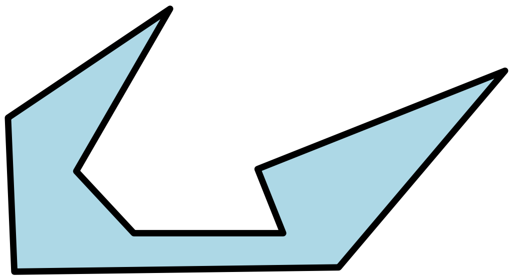




Polígonos

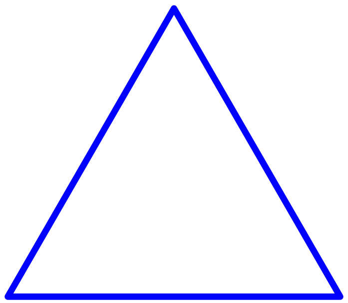
* Definición: Un polígono de n lados es una línea poligonal cerrada de n vértices tal que:
  a) los lados sólo se cortan en los extremos.
  b) dos lados consecutivos no son colineales.

* En algunos contextos, polígono incluye también el interior.
  Lo importante es ser claro en cada momento. Podemos llamarle al interior región poligonal.

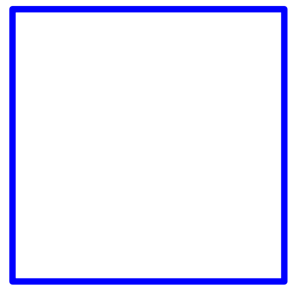


Polígonos regulares

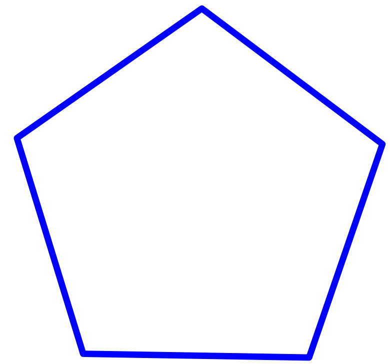
* Se dice que un polígono es regular si todos sus ángulos son iguales y todos sus lados son iguales.



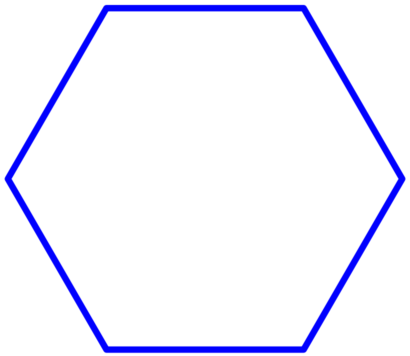
triángulo equilátero



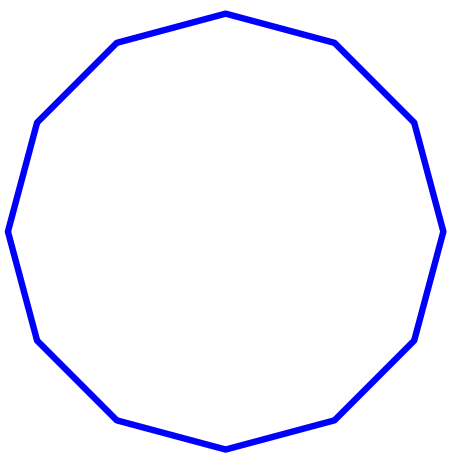
cuadrado



pentágono regular



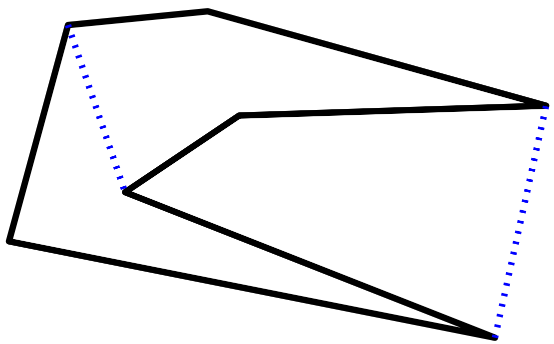
hexágono regular



dodecágono regular

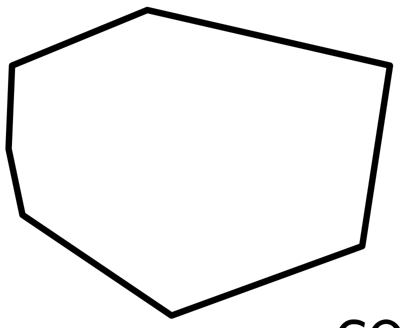
Polígonos convexos

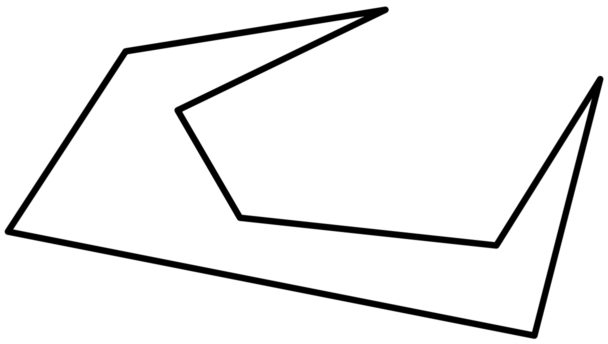
* La definición que vimos para cuadriláteros convexos se extiende de forma inmediata a polígonos de cualquier número de lados.



* Una diagonal es un segmento entre vértices no consecutivos.

* Un polígono es convexo si todas sus diagonales están en el interior del polígono. En otro caso, se dice que el polígono es no convexo.


convexo


no convexo

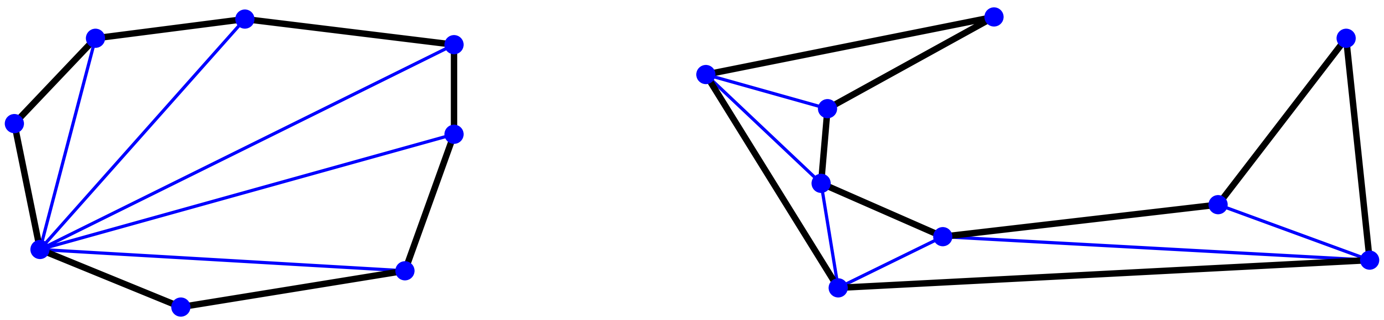
Ángulos de un polígono

* ¿Cuánto vale la suma de los ángulos de un polígono de n lados (un n-gono)?

  $n = 3$: $180°$

  $n = 4$: $360°$

* Propiedad: Utilizando diagonales, cualquier polígono de n lados se puede descomponer en $n - 2$ triángulos.



Idea: ir insertando diagonales que no se corten, hasta que no se pueda continuar.

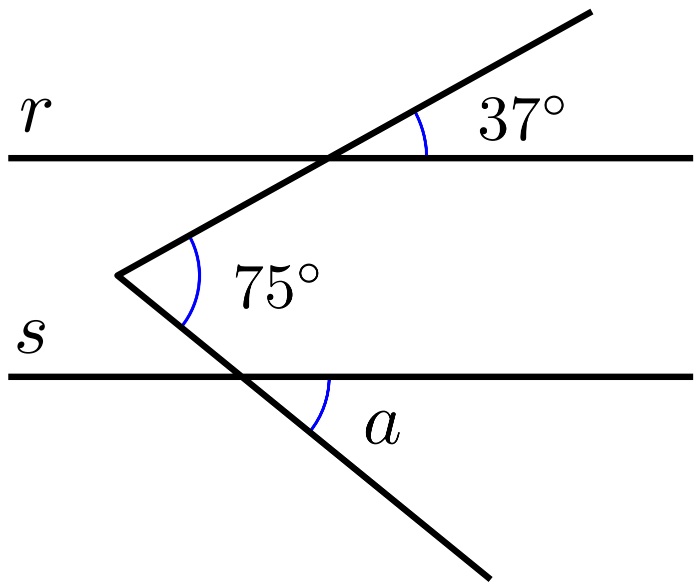
* Propiedad: La suma de los ángulos internos de cualquier polígono de n lados es $(n-2)180°$.

Figuras geométricas - Continuación

* El objetivo es presentar relaciones entre los conceptos y objetos introducidos hasta ahora, y ver cómo ya podemos hacer problemas variados y razonamientos sencillos.

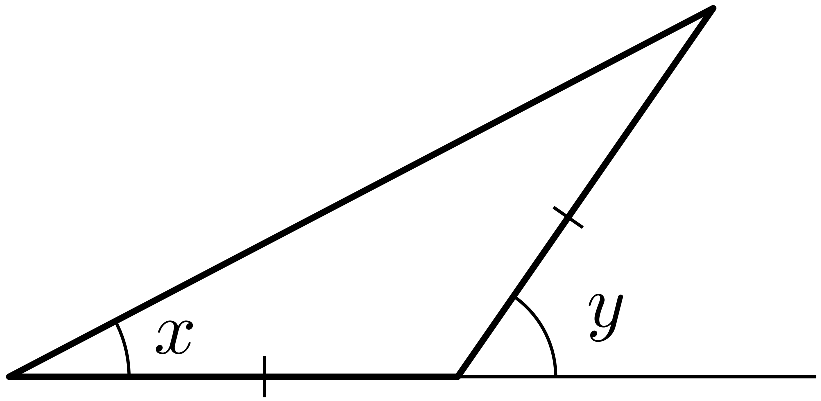
* Problema: sabiendo que $r \| s$, determina la medida del ángulo a.

  Indicación: puedes considerar un triángulo auxiliar.

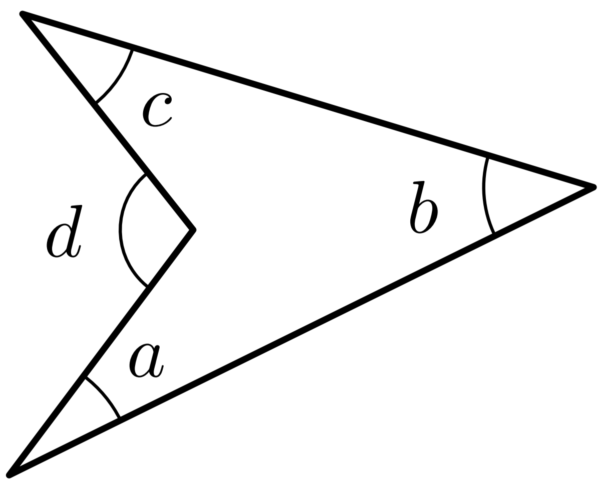


Geometría y razonamiento

- Sabiendo que el triángulo de la figura es isósceles, encuentra la relación entre los ángulos x e y.

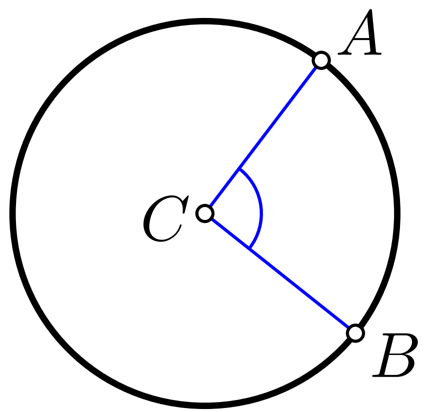


- Demuestra que, en la figura, $d = a + b + c$.

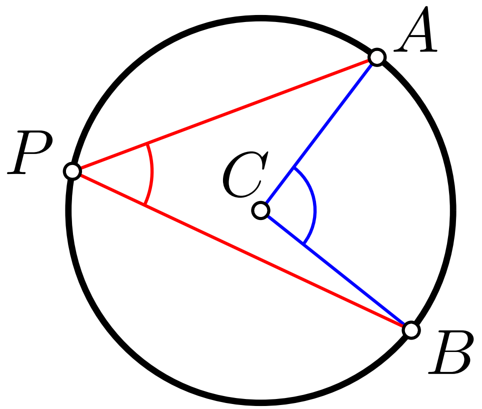


Ángulos en la circunferencia

* Consideremos puntos A y B en una circunferencia de centro C. El ángulo $\angle ACB$ se llama ángulo central.



* Consideremos ahora un punto P en la circunferencia. El ángulo $\angle APB$ se llama ángulo inscrito.



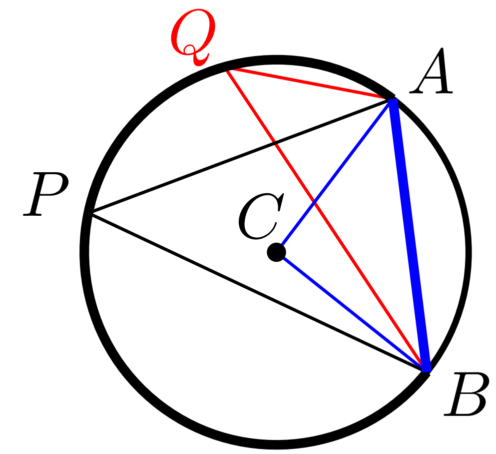
Siempre se verifica

$$\angle APB = \frac{1}{2} \angle ACB$$

(El ángulo inscrito es la mitad del central correspondiente)

Ángulo central - Ángulo inscrito

- Como $\angle APB = \frac{1}{2}\angle ACB$, el ángulo $\angle APB$ es el mismo para cualquier punto P en el arco de la figura. Este arco se llama arco capaz del segmento AB.

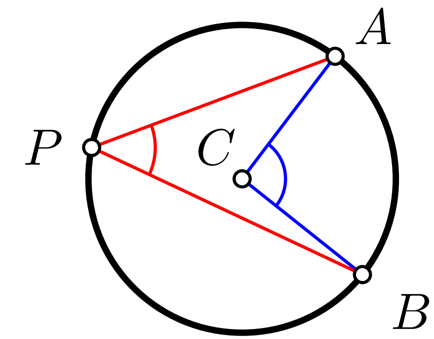


- Ejercicio: dibuja el conjunto de puntos X para los que $\angle AXB = 60°$.

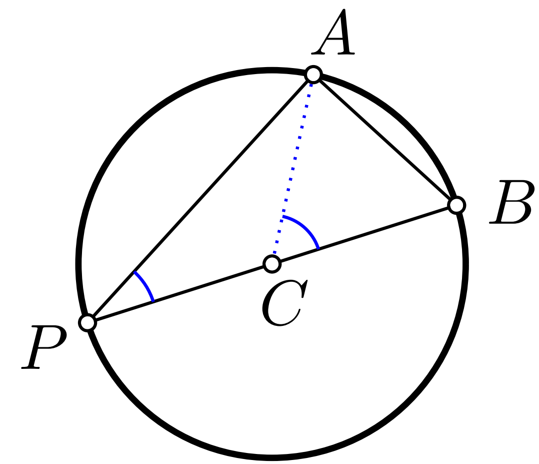
Ángulo central - Ángulo inscrito

∗ Vamos a demostrar que siempre

$$\angle APB = \frac{1}{2}\angle ACB$$

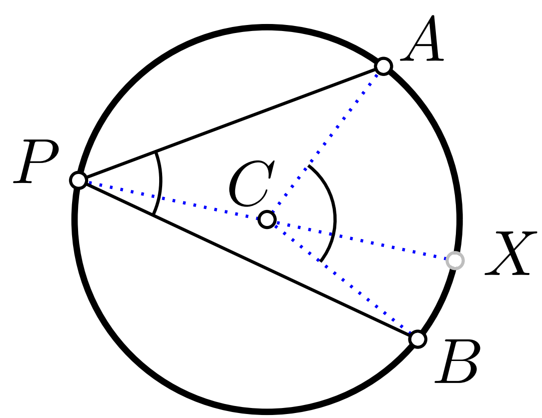


⋆ Caso 1: PB es un diámetro.

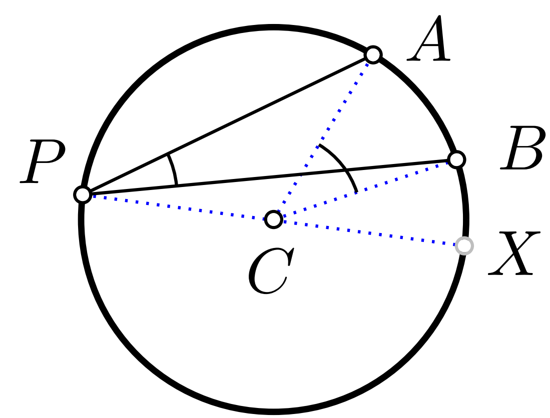


⋆ Caso 2:

(a)

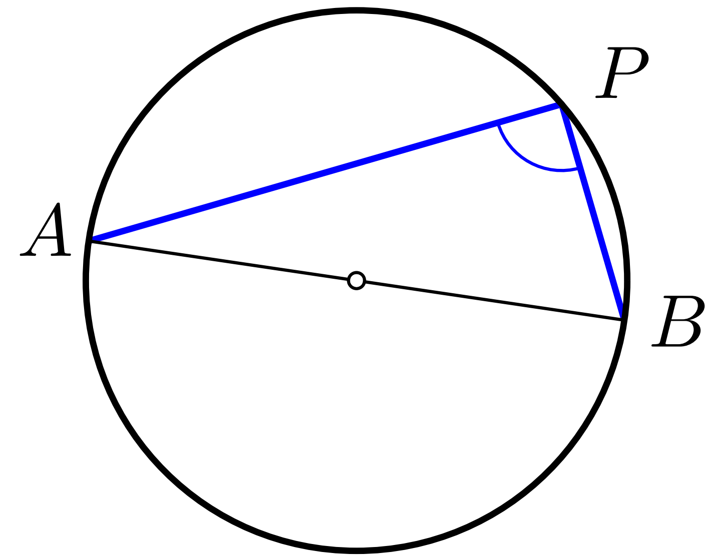


(b)

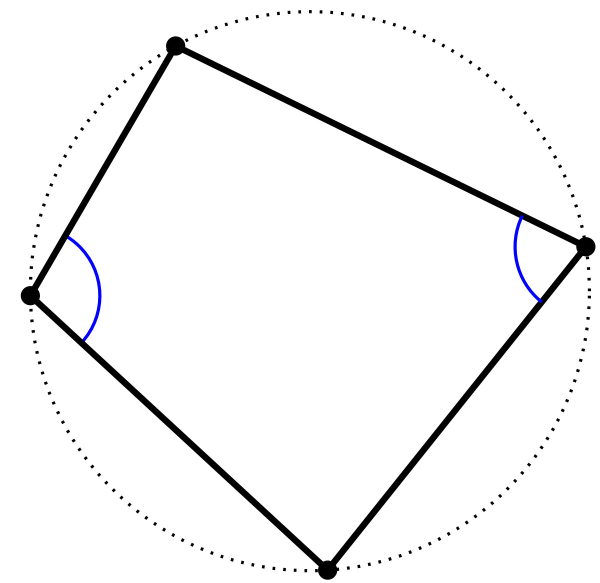


Problemas

* Sabiendo que AB es un diámetro de la circunferencia, determina el ángulo $\angle APB$ de la figura.

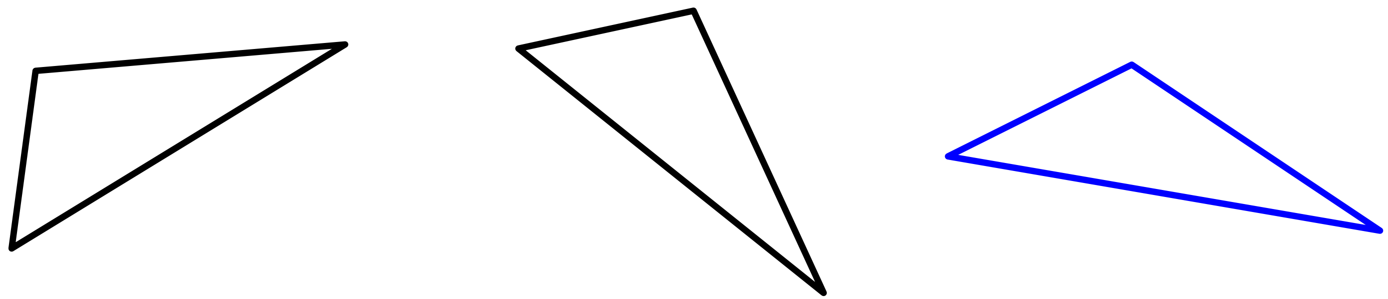


* Demuestra que si los 4 vértices de un cuadrilátero están en una circunferencia, entonces los ángulos opuestos son suplementarios.

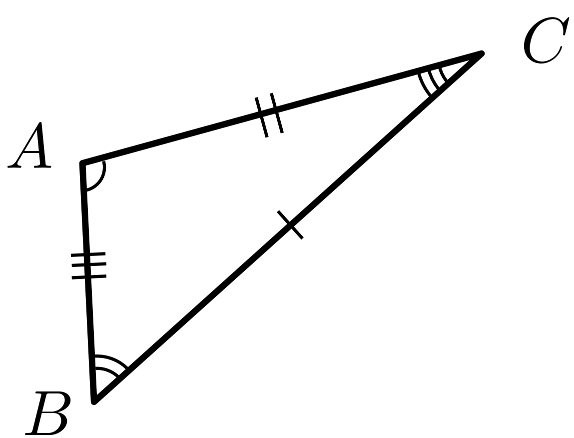


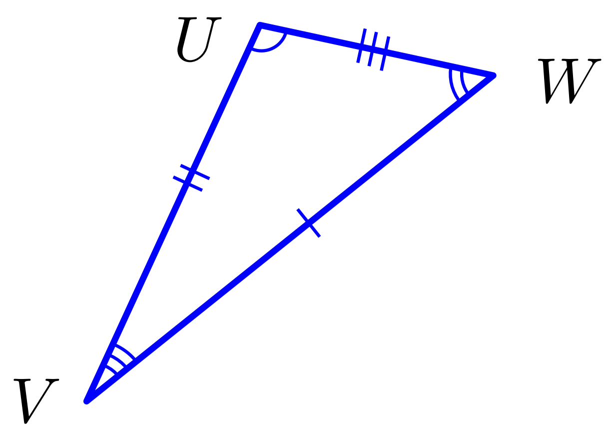
Triángulos congruentes (p. 82)

* Definición en primaria:
  Dos triángulos son congruentes (iguales) si “tienen la misma forma”.



* Definición: Dos triángulos son congruentes si sus lados “correspondientes” tienen la misma longitud y sus ángulos “correspondientes” son iguales.





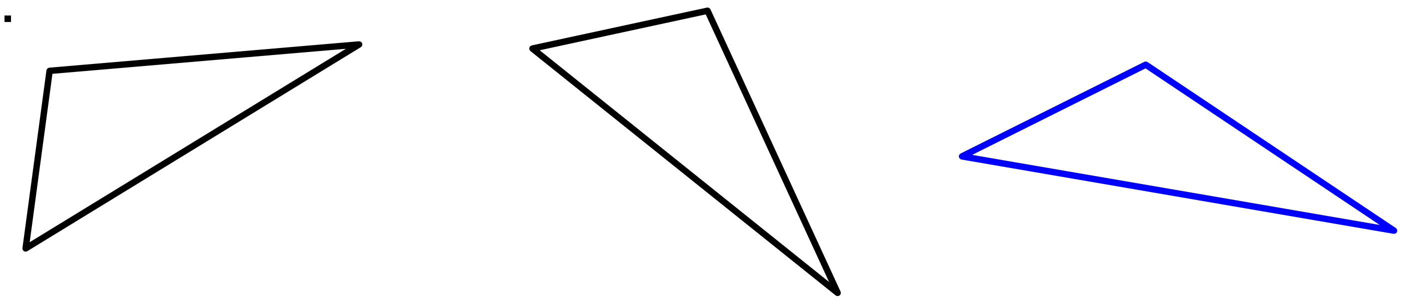
$$ABC \leftrightarrow \Delta ABC$$

Notación:

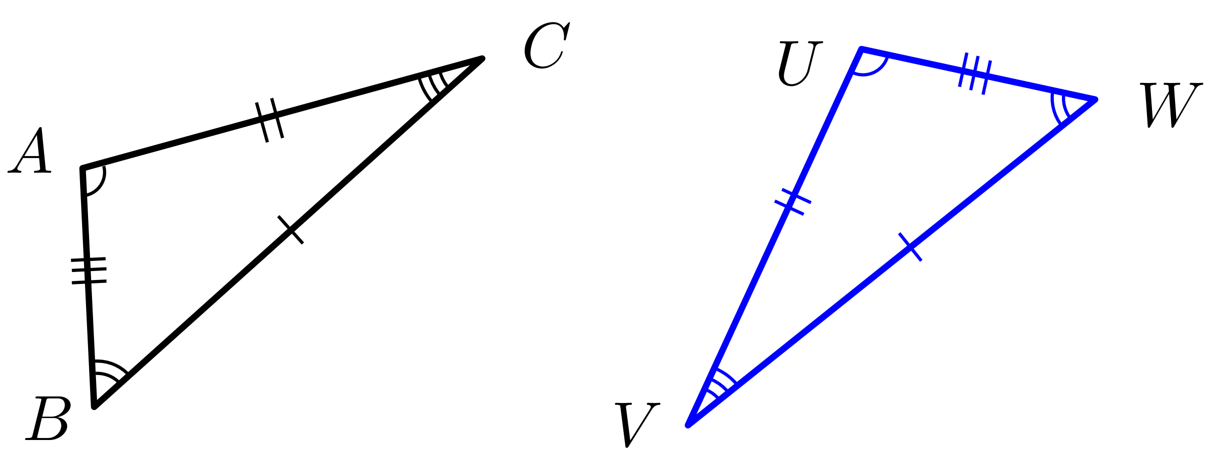
$$ABC \cong UWV$$

Triángulos congruentes (p. 82)

- Definición en primaria:
  Dos triángulos son congruentes (iguales) si "tienen la misma forma".



- Definición: Dos triángulos son congruentes si sus lados "correspondientes" tienen la misma longitud y sus ángulos "correspondientes" son iguales.



$ABC \leftrightarrow \Delta ABC$

Notación:

$$ABC \cong UWV$$

Criterios de congruencia

* Criterio LLL: Si dos triángulos tienen los tres lados iguales (dos a dos) entonces son congruentes.

  Indicación: construye un triángulo de lados 8 cm, 6 cm y 5 cm.

* Esta propiedad (que las longitudes de los lados determinan el triángulo) ya no es cierta para polígonos de cuatro o más lados.

  Ejercicio: dibuja varios cuadriláteros con los cuatro lados de longitud 2 cm.

* Esta observación es muy importante en el diseño (rigidez de estructuras).

Criterios de congruencia

* Hay otros dos criterios para comprobar que dos triángulos son congruentes.

* Criterio ALA: Si dos triángulos tienen un lado y los dos angulos adyacentes iguales entonces son congruentes.

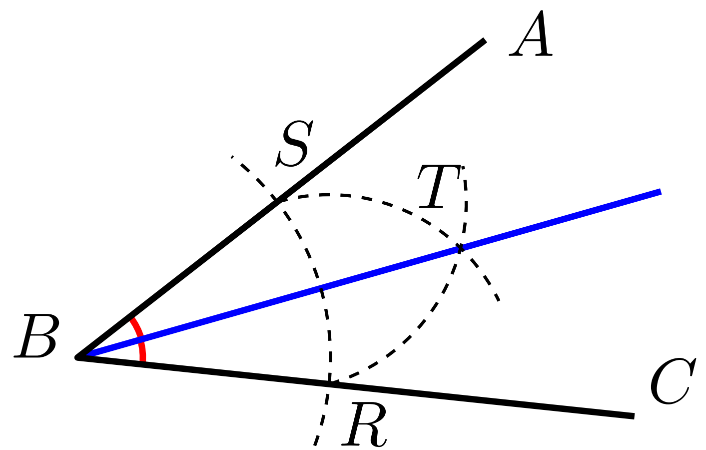
  Ejemplo: construye un triángulo con un lado de 9 cm y con ángulos adyacentes de 65° y 35°.

* Criterio LAL: Si dos triángulos tienen dos lados y el ángulo que definen iguales entonces son congruentes.

  Ejemplo: construye un triángulo con un lado de 9 cm, otro de 6 cm, y tal que estos dos lados forman un angulo de 55°.

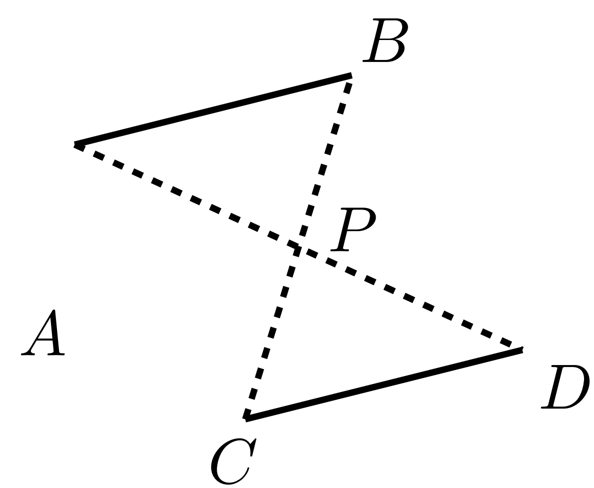
Aplicaciones de la congruencia de triángulos

* Bisectriz de un ángulo



¿Por qué la recta que pasa por B y T es la bisectriz?

* Problema: Sabiendo que los segmentos AB y CD miden lo mismo y son paralelos, demuestra que P es el punto medio de los segmentos BC y AD.

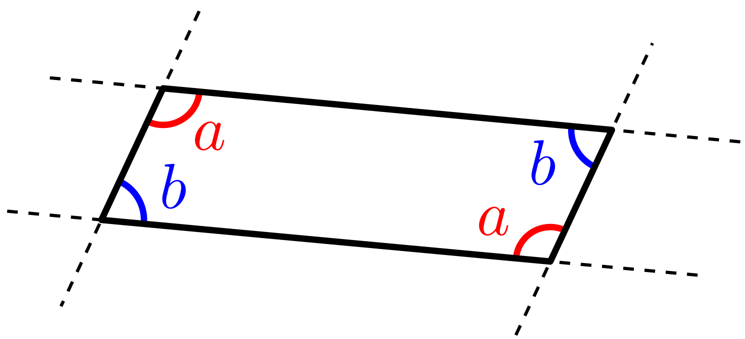


* Demuestra que los vértices de un polígono regular están en una circunferencia.

Congruencias y cuadriláteros (p. 96)

* Un paralelogramo es un cuadrilátero en el que los lados opuestos son paralelos.

* Ya vimos una propiedad de sus ángulos: en cualquier paralelogramo, los ángulos adyacentes son suplementarios, y los ángulos opuestos son iguales.



$$\boxed{a + b = 180^\circ}$$

* Otras dos propiedades. En cualquier paralelogramo:

(1) los lados opuestos son iguales.
(2) las diagonales se cortan en su punto medio.

* Ejercicio: demuestra (1).

Congruencias y cuadriláteros

* Estas propiedades también caracterizan a los paralelogramos. En concreto, supongamos que tenemos un cuadrilátero $ABCD$.

(1) si las dos parejas de ángulos opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
(2) si las dos parejas de lados opuestos son iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
(3) si las diagonales se cortan en el punto medio de ambas, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
(4) si dos lados opuestos son iguales y paralelos, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

* No se trata de aprenderse esto de memoria, sino de razonar sobre ello. Veremos alguna de estas propiedades en la hoja de problemas.

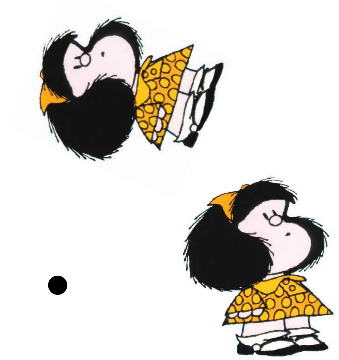
Movimientos (p. 101)

* Un movimiento es una transformación del plano que convierte cualquier figura en otra congruente (es decir, con la misma “forma”).

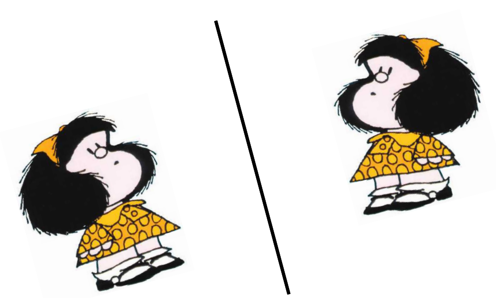
* Ejemplos de movimientos:

  (1) traslaciones

  (2) giros



  (3) simetrías



Movimientos

* El estudio de los movimientos se sale de los objetivos de este curso. Pero desarrollar cierta intuición sobre ellos ayuda a entender una parte del temario de primaria.

* Los movimientos conservan ángulos y distancias.

* Se puede demostrar que los ejemplos anteriores (traslaciones, giros, simetrías) son, en cierto sentido, los únicos movimientos. En concreto:

  Todo movimiento es una traslación, un giro, una simetría, o una composición de estas transformaciones.

Movimientos

* Los movimientos se utilizan para dar una definición correcta (desde el punto de vista matemático) de la idea de “forma” o “figuras congruentes”. La secuencia es la siguiente:

(1) se definen ángulos y distancias.

(2) se definen los movimientos: son las transformaciones que conservan ángulos y distancias.

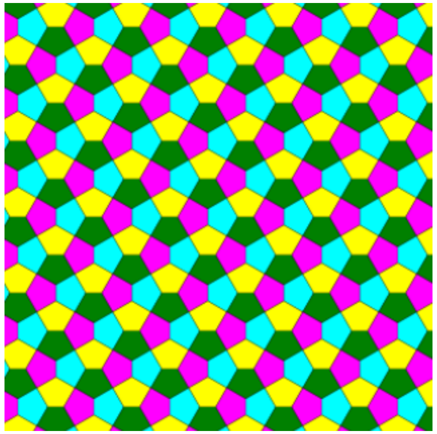
(3) se define la “forma” (figuras congruentes): dos figuras A y B son congruentes si existe un movimiento que transforma A en B.

Ejemplos de actividades

* http://tinyurl.com/qy2wxed

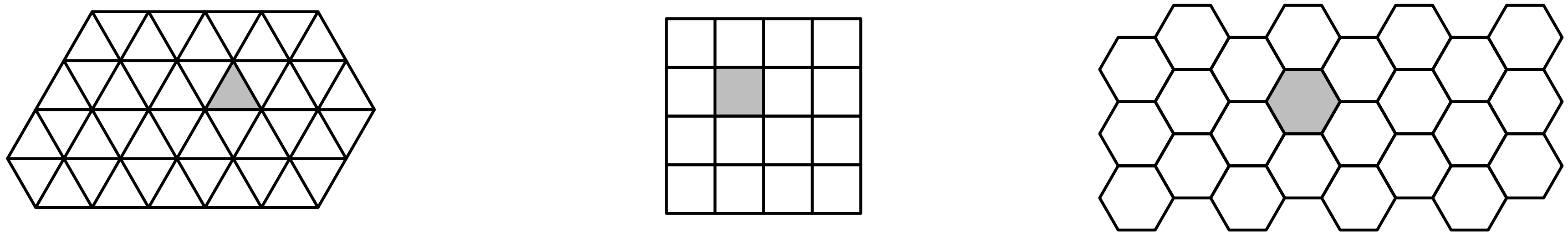
Mosaicos (teselaciones)

* Un mosaico (teselación) es un conjunto de regiones poligonales cuya unión es todo el plano y cuyos interiores no tienen intersección.



* Los mosaicos son un recurso perfecto para diseñar actividades de ampliación.
* Un mosaico es regular si está formado por polígonos regulares congruentes.
* ¿Cuántos mosaicos regulares hay?

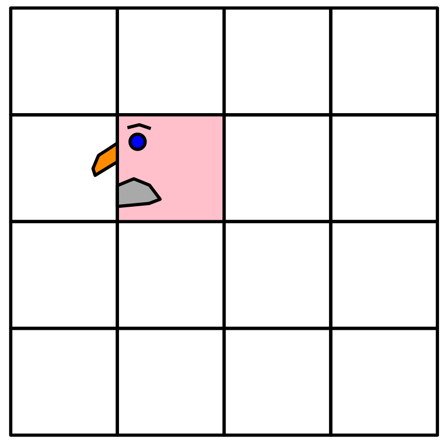
Mosaicos



* Sólo existen estos tres mosaicos regulares.

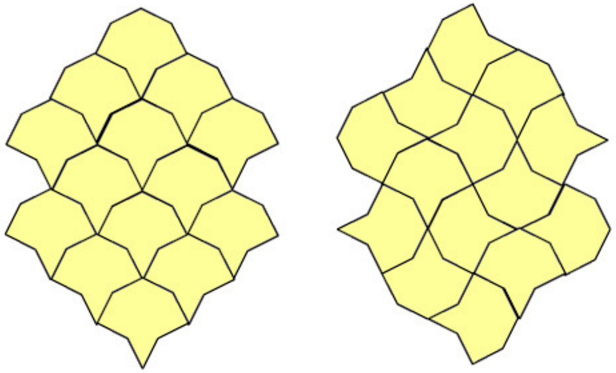
* Una propuesta de actividad:

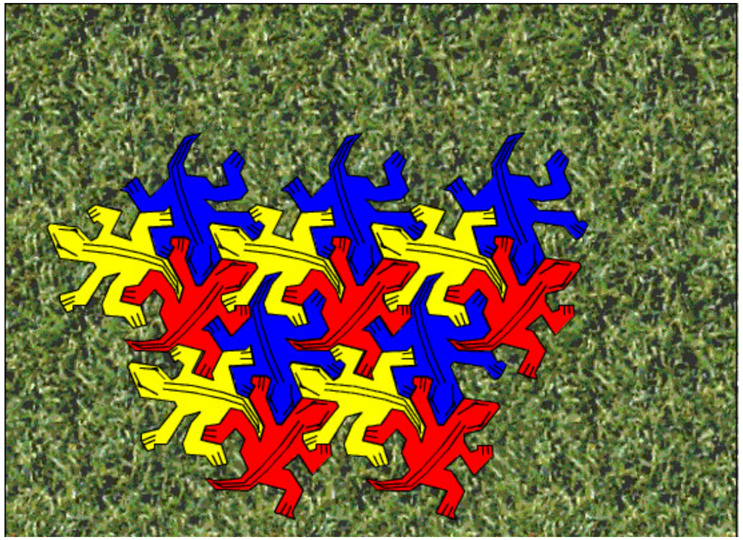
  Empezando por un mosaico regular, se pueden crear infinidad de diseños con la siguiente idea: se modifica una de las teselas (polígonos), y se traslada esa modificación al resto.



Algunos ejemplos

* Algunos ejemplos





* http://tinyurl.com/ox9ekh4