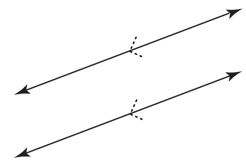
LECCIÓN CONDENSADA

# 11.1 Paralelo y perpendicular

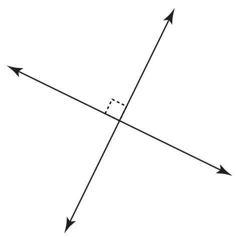
En esta lección

- aprenderás el significado de **paralelo** y **perpendicular**
- descubrirás cómo se relacionan las **pendientes de las rectas paralelas y de las rectas perpendiculares**
- usarás pendientes para ayudarte a **clasificar figuras** en el plano de coordenadas

**Las rectas paralelas** son rectas que están en el mismo plano y que nunca se intersecan. Se presenta un ejemplo a la derecha.



**Las rectas perpendiculares** son rectas que están en el mismo plano y que se intersecan en un ángulo recto.

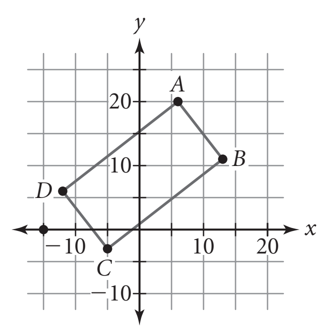


Insertamos una pequeña caja en uno de los ángulos, para mostrar que las rectas son perpendiculares.

## Investigación: Pendientes

Los lados opuestos de un rectángulo son paralelos, y los lados adyacentes son perpendiculares. Al examinar los rectángulos dibujados en una cuadrícula de coordenadas, puedes descubrir cómo se relacionan las pendientes de las rectas paralelas y de las rectas perpendiculares.

En el Paso 1 se dan los vértices de cuatro rectángulos. Aquí se muestra el rectángulo con los vértices que se dan en la parte a.




Encuentra la pendiente de cada lado del rectángulo. Debes obtener estos resultados. (Observación: La notación $\overline{AB}$ significa "segmento $AB$".)

Pendiente de $\overline{AD}$: $\frac{7}{9}$ Pendiente de $\overline{AB}$: $-\frac{9}{7}$

Pendiente de $\overline{BC}$: $\frac{7}{9}$ Pendiente de $DC$: $-\frac{9}{7}$

Observa que las pendientes de los lados paralelos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son iguales y que las pendientes de los lados paralelos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son iguales. Recuerda que, para hallar el **recíproco** de una fracción, intercambias el numerador y el denominador. Por ejemplo, el recíproco de $\frac{3}{4}$ es $\frac{4}{3}$. El producto de un número y su recíproco es 1. Observa las pendientes de los lados perpendiculares $\overline{AD}$ y $\overline{DC}$. La pendiente de $\overline{DC}$ es el *recíproco negativo* de la pendiente de $\overline{AD}$. El producto de las pendientes, $\frac{7}{9}$ y $-\frac{9}{7}$, es $-1$. Encontrarás esta misma relación para cualquier par de lados perpendiculares del rectángulo.

**(continúa)**

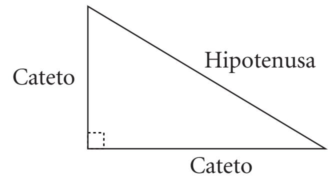

©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 148

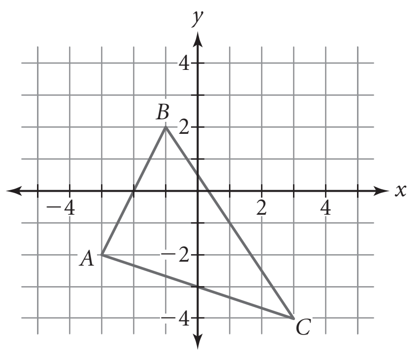


Ahora, escoge otro conjunto de vértices del Paso 1, y encuentra las pendientes de los lados del rectángulo. Debes encontrar las mismas relaciones entre las pendientes de los lados. De hecho, cualesquiera dos rectas paralelas tienen la misma pendiente, y cualesquiera dos rectas perpendiculares tienen pendientes que son recíprocos negativos entre sí.

Un **triángulo rectángulo** tiene un ángulo recto. Los lados que forman el ángulo recto se llaman **catetos** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa.** Si se traza un triángulo en una cuadrícula de coordenadas, puedes usar lo que sabes sobre pendientes de rectas perpendiculares para determinar si se trata de un triángulo rectángulo. Esto se muestra en el Ejemplo A de tu libro. Aquí se presenta otro ejemplo.




***EJEMPLO*** Decide si este triángulo es rectángulo.

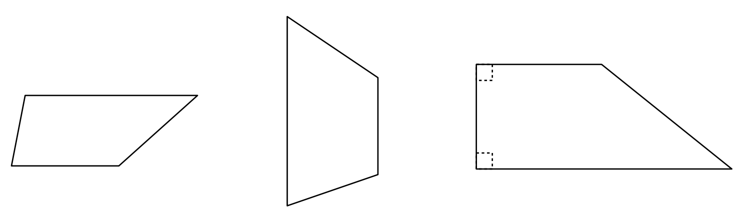



▶ ***Solución*** El triángulo tiene vértices $A(-3, -2)$, $B(-1, 2)$, y $C(3, -4)$. Claramente, los ángulos $B$ y $C$ no son rectos, pero el ángulo $A$ podría serlo. Para verificarlo, encuentra las pendientes de $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$:

Pendiente $\overline{AB}$: $\dfrac{2-(-2)}{-1-(-3)} = \dfrac{4}{2} = 2$ Pendiente $\overline{AC}$: $\dfrac{-4-(-2)}{3-(-3)} = \dfrac{-2}{6} = -\dfrac{1}{3}$

Las pendientes, 2 y $-\frac{1}{3}$, no son recíprocos negativos; entonces los lados no son perpendiculares. Debido a que ninguno de los ángulos son rectos, el triángulo no es rectángulo.

Un **trapecio** es un cuadrilátero que tiene un par de lados opuestos paralelos y un par de lados opuestos no paralelos. Un trapecio que posee un ángulo recto se conoce como **trapecio recto.** Cada trapecio recto debe tener dos ángulos rectos porque los lados opuestos son paralelos. Aquí se muestran algunos ejemplos de trapecios.



Para determinar si un cuadrilátero trazado en un sistema de coordenadas es un trapecio sin ser un paralelogramo, necesitas verificar que dos de los lados opuestos tengan la misma pendiente y que los otros dos lados opuestos tengan pendientes distintas. Para decidir si el trapecio es un trapecio recto, también necesitas verificar que las pendientes de dos lados adyacentes son recíprocos negativos. Esto se ilustra en el Ejemplo B de tu libro.


©2004 Key Curriculum Press

LECCIÓN CONDENSADA

# 11.2 Encontrar el punto medio

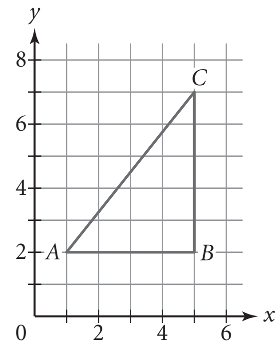
En esta lección

- descubrirás la **fórmula del punto medio**
- usarás la fórmula del punto medio para hallar el punto medio de un segmento
- escribirás ecuaciones para la **mediana** de un triángulo y para la **mediatriz** de un segmento

El **punto medio** de un segmento de recta es el punto que está a mitad del camino entre los dos extremos. El texto en la página 588 de tu libro explica que es necesario hallar los puntos medios para trazar la **mediana** de un triángulo y la **mediatriz** (*perpendicular bisector*) de un segmento de recta. Lee ese texto atentamente.

## Investigación: En el medio

Este triángulo tiene los vértices $A(1, 2)$, $B(5, 2)$, y $C(5, 7)$.

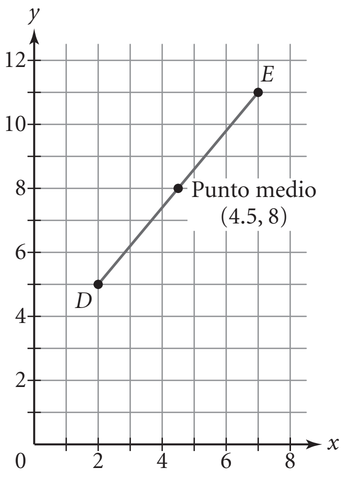



El punto medio de $\overline{AB}$ es (3, 2). Observa que la coordenada $x$ de este punto es el promedio de las coordenadas $x$ de los puntos extremos.

El punto medio de $\overline{BC}$ es (5, 4.5). Observa que la coordenada $y$ de este punto es el promedio de las coordenadas $y$ de los puntos extremos.

El punto medio de $\overline{AC}$ es (3, 4.5). Observa que la coordenada $x$ de este punto es el promedio de las coordenadas $x$ de los puntos extremos, y que la coordenada $y$ de este punto es el promedio de las coordenadas $y$ de los puntos extremos.

El segmento $DE$ tiene puntos extremos $D(2, 5)$ y $E(7, 11)$. El punto medio de $\overline{DE}$ es (4.5, 8). La coordenada $x$ de este punto es el promedio de las coordenadas $x$ de los puntos extremos, y la coordenada $y$ de este punto es el promedio de las coordenadas $y$ de los puntos extremos.




Para encontrar el punto medio del segmento comprendido entre cada par de puntos, usa la idea de sacar los promedios de las coordenadas de los puntos extremos. Para el Paso 8, debes obtener los siguientes resultados.

**a.** punto medio de $\overline{FG}$: $(-2.5, 28)$

**b.** punto medio de $\overline{HJ}$: $(-1, -2)$

La técnica usada en la investigación para hallar el punto medio de un segmento se conoce como la **fórmula del punto medio.** Si los puntos extremos de un segmento tienen coordenadas $(x_1, y_1)$ y $(x_2, y_2)$, el punto medio del segmento tiene las coordenadas

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

**(continúa)**

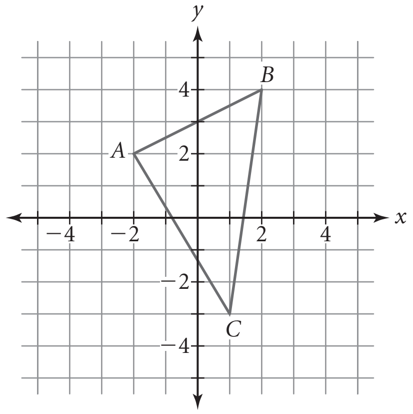


©2004 Key Curriculum Press

## Lección 11.2 • Encontrar el punto medio (continuación)

El ejemplo de tu libro muestra cómo hallar las ecuaciones de una mediana de un triángulo y de la mediatriz de uno de sus lados. A continuación hay otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Este triángulo tiene los vértices $A(-2, 2)$, $B(2, 4)$, y $C(1, -3)$.




**a.** Escribe la ecuación de la mediana que parte del vértice $A$.

**b.** Escribe la ecuación de la mediatriz de $\overline{BC}$.

► ***Solución***

**a.** La mediana que parte del vértice $A$ va al punto medio de $\overline{BC}$. Por tanto, debes encontrar el punto medio de $\overline{BC}$.

punto medio de $\overline{BC}$: $\left(\dfrac{2+1}{2}, \dfrac{4+(-3)}{2}\right) = (1.5, 0.5)$

Ahora, usa las coordenadas del vértice $A$ y el punto medio para hallar la pendiente de la mediana.

pendiente de la mediana: $\dfrac{0.5-2}{1.5-(-2)} = \dfrac{-1.5}{3.5} = -\dfrac{3}{7}$

Usa las coordenadas del punto medio y la pendiente para hallar la ecuación.

$y = 0.5 - \frac{3}{7}(x - 1.5)$

**b.** La mediatriz de $\overline{BC}$ pasa por el punto medio de $\overline{BC}$, que es $(1.5, 0.5)$ y es perpendicular a $\overline{BC}$. La pendiente de $\overline{BC}$ es $\frac{-3-4}{1-2}$, ó 7, de modo que la pendiente de la mediatriz es el recíproco negativo de 7, ó $-\frac{1}{7}$. Escribe la ecuación usando esta pendiente y las coordenadas del punto medio.

$y = 0.5 - \frac{1}{7}(x - 1.5)$


©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 151

LECCIÓN CONDENSADA

11.3

# Cuadrados, triángulos rectángulos, y áreas

En esta lección

- encontrarás el **área de polígonos** trazados en una cuadrícula
- encontrarás el **área** y la **longitud lateral de cuadrados** trazados en una cuadrícula
- dibujarás un segmento de una longitud dada, trazando un cuadrado con el cuadrado de la longitud como área

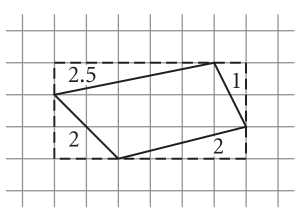
El Ejemplo A de tu libro muestra cómo hallar los largos de un rectángulo y de un triángulo rectángulo. El Ejemplo B muestra cómo hallar el área de un cuadrado inclinado, al dibujar un cuadrado con lados horizontales y verticales alrededor del cuadrado inclinado. Lee ambos ejemplos con atención.

## Investigación: ¿Cuál es mi área?

**Paso 1** Encuentra el área de cada figura del Paso 1. Debes obtener estos resultados.

| | | |
|---|---|---|
| **a.** 1 unidad cuadrada | **b.** 5 unidades cuadradas | **c.** 6 unidades cuadradas |
| **d.** 2 unidades cuadradas | **e.** 8 unidades cuadradas | **f.** 3 unidades cuadradas |
| **g.** 6 unidades cuadradas | **h.** 6 unidades cuadradas | **i.** 10.5 unidades cuadradas |
| **j.** 8 unidades cuadradas | | |

Existen muchas maneras de encontrar el área de estas figuras. Una técnica útil implica el trazado de un rectángulo alrededor de una figura. La ilustración siguiente muestra un rectángulo alrededor de la figura i. Para hallar el área de la figura, resta la suma de las áreas de los triángulos del área del rectángulo.

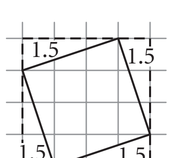



$$\text{Área de la figura i} = 3 \cdot 6 - (2.5 + 1 + 2 + 2)$$
$$= 18 - 7.5 = 10.5$$

**Pasos 2–4** Si conoces el área de un cuadrado, puedes hallar la longitud de sus lados al sacar la raíz cuadrada. Por ejemplo, el cuadrado con rótulo d del Paso 1 tiene un área de 2 unidades cuadradas, de modo que la longitud de cada lado es $\sqrt{2}$ unidades. El cuadrado con rótulo e del Paso 1 tiene un área de 8 unidades cuadradas, así que la longitud de cada lado es $\sqrt{8}$ unidades.

Observa los cuadrados del Paso 3. El primer cuadrado tiene un área de 9 y una longitud lateral de 3.

Para encontrar el área del segundo cuadrado, rodéalo con un cuadrado cuyos lados horizontales y verticales son tales como se muestra en la ilustración. El área es 10 unidades cuadradas, de modo que la longitud es $\sqrt{10}$ unidades.




$$\text{Área} = 16 - 4(1.5)$$
$$= 16 - 6$$
$$= 10 \text{ unidades cuadradas}$$

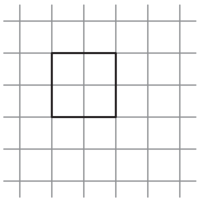
**(continúa)**


©2004 Key Curriculum Press

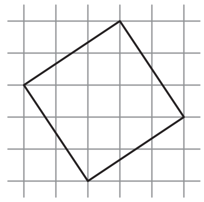
DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 152



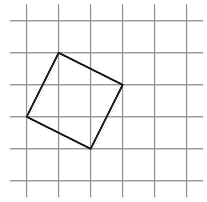
En el Paso 4 se muestran los cuadrados más pequeño y más grande que se pueden dibujar en una cuadrícula de 5 por 5. Dibuja al menos otros cinco cuadrados, y encuentra el área y la longitud lateral de cada uno. Aquí se ven tres ejemplos.



Área = 4 unidades cuadradas
Longitud lateral = 2 unidades



Área = 13 unidades cuadradas
Longitud lateral = $\sqrt{13}$ unidades



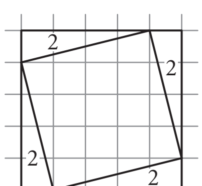
Área = 5 unidades cuadradas
Longitud lateral = $\sqrt{5}$ unidades

Debido a que $\sqrt{10}$ es igual a un decimal cuyos dígitos se continúan indefinidamente, podría sorprenderte que puedes dibujar un segmento con una longitud de exactamente $\sqrt{10}$ unidades. Sólo necesitas dibujar un cuadrado con un área de 10 unidades cuadradas; cada lado tendrá una longitud de $\sqrt{10}$ unidades. El ejemplo siguiente te muestra cómo dibujar un segmento con una longitud de $\sqrt{17}$ unidades.

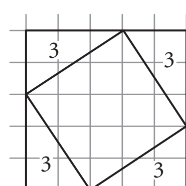
***EJEMPLO*** Traza un segmento de recta que tenga una longitud de exactamente $\sqrt{17}$ unidades.

▶ ***Solución*** Para trazar un segmento con una longitud de $\sqrt{17}$ unidades, primero traza un cuadrado con un área de 17 unidades cuadradas. Debido a que 17 no es un cuadrado perfecto, el cuadrado estará inclinado. Empieza con un cuadrado más grande, como uno de 5 por 5. Un cuadrado con estas dimensiones tiene un área de 25 unidades cuadradas. Intenta dibujar un cuadrado inclinado dentro del cuadrado de 5 por 5, de modo que la suma de las áreas de los cuatro triángulos circundantes sea $25 - 17$, ó 8.

Aquí se ven dos formas de dibujar un cuadrado inclinado con sus vértices en un cuadrado de 5 por 5.




Área del cuadrado inclinado =
$25 - 4(2) = 17$ unidades cuadradas




Área del cuadrado inclinado =
$25 - 4(3) = 13$ unidades cuadradas

El cuadrado a la izquierda tiene un área de 17 unidades cuadradas; entonces, cada uno de sus lados es un segmento con una longitud de $\sqrt{17}$ unidades.


©2004 Key Curriculum Press

LECCIÓN CONDENSADA

# 11.4 El teorema de Pitágoras

En esta lección

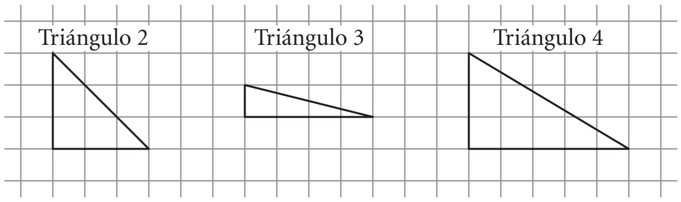
- descubrirás el **teorema de Pitágoras**
- usarás el teorema de Pitágoras para hallar la longitud desconocida de un lado de un triángulo rectángulo

En tu libro, lee el texto que precede la investigación, en el cual se explica que la fórmula del área de un triángulo es

$$\textit{Área} = \frac{\textit{base} \cdot \textit{altura}}{2} \text{ ó } A = \frac{1}{2}bh$$

## Investigación: Los lados de un triángulo rectángulo

En el diagrama de la página 599 de tu libro se muestra un triángulo rectángulo que tiene cuadrados dibujados en los lados. Encuentra el área de cada cuadrado y registra los resultados en una tabla como la que se muestra en el Paso 4. Después copia cada triángulo rectángulo dibujado en el espacio siguiente, traza un cuadrado en cada lado y registra las áreas en tu tabla. Repite estos pasos para dos triángulos rectángulos que hayas inventado.




Aquí se muestran los resultados para el triángulo de tu libro y los tres triángulos dibujados anteriormente.

| | **Área del cuadrado del cateto 1** | **Área del cuadrado del cateto 2** | **Área del cuadrado de la hipotenusa** |
|---|---|---|---|
| Triángulo 1 | 4 | 16 | 20 |
| Triángulo 2 | 9 | 9 | 18 |
| Triángulo 3 | 1 | 16 | 17 |
| Triángulo 4 | 9 | 25 | 34 |

Para cada triángulo rectángulo, debes encontrar que el área del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados de los catetos.

Ahora calcula las longitudes de los catetos y de la hipotenusa de cada triángulo.

| | **Longitud del cateto 1** | **Longitud del cateto 2** | **Longitud de la hipotenusa** |
|---|---|---|---|
| Triángulo 1 | 2 | 4 | $\sqrt{20}$ |
| Triángulo 2 | 3 | 3 | $\sqrt{18}$ |
| Triángulo 3 | 1 | 4 | $\sqrt{17}$ |
| Triángulo 4 | 3 | 5 | $\sqrt{34}$ |

**(continúa)**


©2004 Key Curriculum Press

### Lección 11.4 • El teorema de Pitágoras (continuación)

Por cada triángulo rectángulo, encontrarás que esta regla relaciona las longitudes de los catetos con la longitud de la hipotenusa.

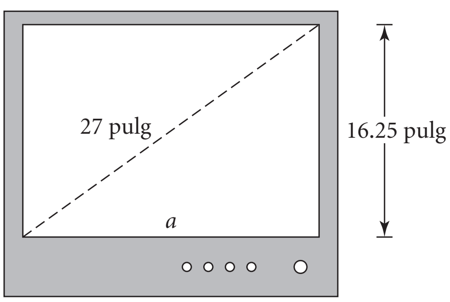
$(\textit{longitud del cateto } 1)^2 + (\textit{longitud del cateto } 2)^2 = (\textit{longitud de la hipotenusa})^2$

La relación que descubriste en la investigación se conoce como el **teorema de Pitágoras.** Un *teorema* es una fórmula matemática o proposición que ha sido probada como cierta. Lee la proposición del teorema en la página 600 de tu libro.

El teorema de Pitágoras es útil para hallar la longitud de un lado de un triángulo rectángulo cuando conoces las longitudes de los otros dos lados. El ejemplo de tu libro muestra cómo usar el teorema para encontrar la distancia de la base de *home* a la segunda base en un diamante de béisbol. Lee ese ejemplo y luego lee el ejemplo que se presenta a continuación.

***EJEMPLO*** El tamaño de un aparato de televisión o de un monitor de computadora se describe dando la longitud de la diagonal de su pantalla. La pantalla de la televisión de Jackson, que es de 27 pulgadas, tiene una altura de aproximadamente 16.25 pulgadas. ¿Qué ancho tiene la pantalla?

▶ ***Solución*** Aquí se ve un dibujo de la televisión de Jackson. En la ilustración se muestra un triángulo rectángulo, en el cual la altura y el ancho de la pantalla son los catetos y la diagonal es la hipotenusa.




Puedes usar el teorema de Pitágoras para encontrar el ancho de la televisión.

| | |
|---|---|
| $a^2 + b^2 = c^2$ | Teorema de Pitágoras. |
| $a^2 + 16.25^2 = 27^2$ | Un cateto tiene una longitud de 16.25 y la hipotenusa tiene una longitud de 27. |
| $a^2 + 264.0625 = 729$ | Calcula los cuadrados. |
| $a^2 = 464.9375$ | Resta 264.0625 de ambos lados. |
| $a = \sqrt{464.9375}$ | Saca la raíz cuadrada en ambos lados. |
| $a \approx 21.56$ | Evalúa. |

La pantalla de la televisión tiene un ancho de aproximadamente 21.56 pulgadas.


©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 155

LECCIÓN CONDENSADA

# 11.5 Operaciones con raíces

En esta lección

- aprenderás las **reglas para reescribir las expresiones radicales**
- aplicarás las reglas para hallar las áreas de rectángulos y verificar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas

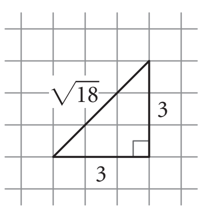
Las expresiones radicales pueden escribirse en más de una manera. En esta lección aprenderás unas reglas para reescribir expresiones radicales.

En el Ejemplo A de tu libro se muestra cómo puedes usar el teorema de Pitágoras para dibujar un segmento de longitud $\sqrt{13} + \sqrt{13}$. El ejemplo indica que $\sqrt{13} + \sqrt{13}$ equivale a $2\sqrt{13}$. Lee este ejemplo atentamente y asegúrate de que lo entiendes. Usarás métodos parecidos durante la investigación.

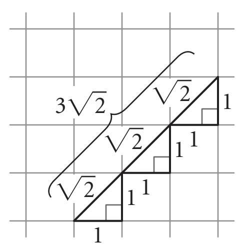
## Investigación: Expresiones radicales

**Pasos 1–3** En papel cuadriculado, dibuja segmentos de recta que tengan las longitudes dadas en el Paso 1. Quizás necesites dibujar más de un triángulo para crear algunas de las longitudes. Aquí tienes los dibujos correspondientes a las partes a, e, y h.

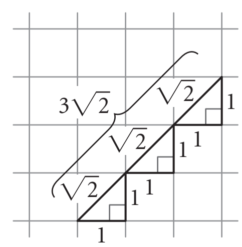
**a.**




**e.**




**h.**




Todos estos segmentos tienen la misma longitud. Esto ilustra que $\sqrt{18}$, $3\sqrt{2}$, y $\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2}$ son expresiones equivalentes. (Puedes verificar esto encontrando las aproximaciones decimales con tu calculadora.)

Tus dibujos deben mostrar también que $\sqrt{40}$, $2\sqrt{10}$, y $\sqrt{10} + \sqrt{10}$ son equivalentes, y que $\sqrt{20}$, $2\sqrt{5}$, y $\sqrt{5} + \sqrt{5}$ son equivalentes.

**Pasos 4–6** Observa las expresiones del Paso 4. Intenta encontrar otra manera de escribir cada expresión. Sustituye las variables por valores positivos para verificar que tu expresión es equivalente a la original. Aquí se muestran los resultados.

**a.** $4\sqrt{x}$ **b.** $\sqrt{xy}$ **c.** $x\sqrt{y}$ ó $\sqrt{x^2y}$

**d.** $x$ ó $\sqrt{x^2}$ **e.** $\sqrt{x}$

A continuación se resumen algunas de las cosas que has aprendido sobre la reescritura de las expresiones radicales.

- Puedes sumar o restar expresiones radicales que tengan el mismo número dentro del símbolo de raíz cuadrada.
- La raíz cuadrada de un número multiplicada por la raíz cuadrada de otro número es igual a la raíz cuadrada del producto.
- La raíz cuadrada de un número dividida por la raíz cuadrada de otro número es igual a la raíz cuadrada del cociente.

**(continúa)**


©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 156



Usa lo que has aprendido para hallar el área de cada rectángulo en el Paso 6. Aquí se presentan los resultados de las partes b y d.

**b.**
$$\begin{aligned} 2\sqrt{7} \cdot 2\sqrt{7} &= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{7}\,\sqrt{7} \\ &= 4\sqrt{7 \cdot 7} \\ &= 4\sqrt{49} \\ &= 4 \cdot 7 = 28 \end{aligned}$$

El área es 28 pulgadas cuadradas.

**d.**
$$\begin{aligned} 7\sqrt{8}\left(5 + 6\sqrt{12}\right) &= 35\sqrt{8} + 42\sqrt{96} \\ &= 35\sqrt{4 \cdot 2} + 42\sqrt{16 \cdot 6} \\ &= 35\sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + 42\sqrt{16}\,\sqrt{6} \\ &= 35(2)\sqrt{2} + 42(4)\sqrt{6} \\ &= 70\sqrt{2} + 168\sqrt{6} \end{aligned}$$

El área es aproximadamente 510.51 centímetros cuadrados.

Ahora sigue con el Ejemplo B en tu libro. Luego lee las reglas para reescribir las expresiones radicales que están en la página 605. En el Ejemplo C se muestra cómo puedes usar las reglas para verificar una solución de una ecuación cuadrática. Aquí se presenta otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Muestra que $-3 + \sqrt{2}$ es una solución de $x^2 + 6x + 7 = 0$.

► ***Solución***

$$x^2 + 6x + 7 \qquad \text{Expresión original.}$$

$$\left(-3 + \sqrt{2}\right)^2 + 6\left(-3 + \sqrt{2}\right) + 7 \qquad \text{Sustituye } x \text{ por } -3 + \sqrt{2}.$$

$$\left(-3 + \sqrt{2}\right)^2 - 18 + 6\sqrt{2} + 7 \qquad \text{Distribuye 6 en } -3 + \sqrt{2}.$$

Usa un diagrama rectangular para cuadrar $-3 + \sqrt{2}$.

| | $-3$ | $\sqrt{2}$ |
|---|---|---|
| $-3$ | $9$ | $-3\sqrt{2}$ |
| $\sqrt{2}$ | $-3\sqrt{2}$ | $2$ |

$$\left(9 - 3\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 2\right) - 18 + 6\sqrt{2} + 7$$

$$9 + 2 - 18 + 7 \qquad \text{Combina los términos } -3\sqrt{2},\ -3\sqrt{2},\ \text{y } 6\sqrt{2}.$$

$$0 \qquad \text{Suma y resta.}$$

Al sustituir $x$ por $\left(-3 + \sqrt{2}\right)$ la expresión $x^2 + 6x + 7$ se hace igual a 0, de modo que $-3 + \sqrt{2}$ es una solución de la ecuación $x^2 + 6x + 7 = 0$.


©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 157

LECCIÓN CONDENSADA

# 11.6 Fórmula de la distancia

En esta lección

- descubrirás la **fórmula de la distancia,** que se utiliza para encontrar la distancia entre dos puntos
- resolverás ecuaciones que contienen expresiones radicales

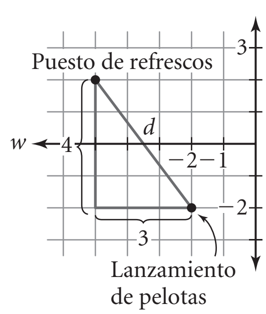
En el Ejemplo A de tu libro se muestra cómo puedes hallar la distancia entre dos puntos graficándolos, trazando un triángulo rectángulo, y aplicando el teorema de Pitágoras. Lee ese ejemplo atentamente. En la investigación, aprenderás una fórmula que puede usarse para hallar la distancia entre dos puntos sin graficarlos.

## Investigación: Parque de diversiones

**Pasos 1–4** Observa el mapa del parque de diversiones en la página 612. Puedes hallar las coordenadas para cada una de las atracciones.

**a.** Acróbatas: $(-1, 4)$
**b.** Lanzamiento de pelotas: $(-2, -2)$
**c.** Carros chocones: $(-4, -3)$
**d.** Rueda de la fortuna: $(0, 0)$
**e.** Casa de los espejos: $(3, 1)$
**f.** Tienda de pantomima: $(3, 3)$
**g.** Puesto de refrescos: $(-5, 2)$
**h.** Montaña rusa: $(-4, 5)$
**i.** Martillo: $(2, -3)$

Halla la distancia exacta entre cada par de atracciones enumeradas en el Paso 2. Para las atracciones que no se ubican en la misma recta horizontal o vertical, necesitarás dibujar un triángulo rectángulo y usar el teorema de Pitágoras. Por ejemplo, puedes usar este triángulo para hallar la distancia entre el puesto de refrescos y el lanzamiento de pelotas.




$$3^2 + 4^2 = d^2$$
$$9 + 16 = d^2$$
$$25 = d^2$$

Debes obtener las siguientes respuestas.

**a.** 6 unidades
**b.** $\sqrt{10}$ unidades
**c.** 2 unidades
**d.** 5 unidades
**e.** $\sqrt{85}$ unidades

La montaña rusa y el martillo son los más alejados. Usando el teorema de Pitágoras, puedes calcular que la distancia entre ellos es 10 unidades. Si cada unidad representa 0.1 milla, entonces están separados 1 milla.

(continúa)

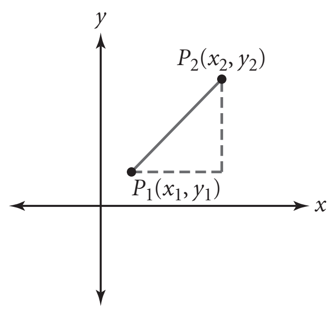

©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 158



Supón que Chris estaciona su auto en (17, −9). Imagina un triángulo rectángulo cuya hipotenusa se extiende desde el puesto de refrescos hasta el auto de Chris. La longitud del cateto horizontal es la diferencia entre las coordenadas *x:* $17 - (-5) = 22$. La longitud del cateto vertical es la diferencia entre las coordenadas *y:* $-9 - 2 = -11$. Si $d$ es la longitud de la hipotenusa, entonces $d^2 = 22^2 + 11^2$, ó 605; de modo que $d = \sqrt{605}$, ó aproximadamente 24.6 unidades. Si cada unidad es de 0.1 milla, la distancia es 2.46 millas.

**Pasos 5–9** Se está considerando la posibilidad de poner dos nuevas atracciones en el parque. La primera, $P_1$, tendrá las coordenadas $(x_1, y_1)$ y la segunda, $P_2$, tendrá las coordenadas $(x_2, y_2)$. Puedes dibujar un triángulo rectángulo con catetos que son paralelos a los ejes y la hipotenusa $\overline{P_1P_2}$.




La distancia vertical entre $P_1$ y $P_2$ es $y_2 - y_1$. La distancia horizontal entre $P_1$ y $P_2$ es $x_2 - x_1$. Usando el teorema de Pitágoras, sabes que

$$distancia^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Sacando la raíz cuadrada de ambos lados, obtienes la fórmula

$$distancia = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta fórmula funciona para dos puntos cualesquiera. Por ejemplo, los carros chocones tienen las coordenadas (−4, −3) y la tienda de pantomima tiene las coordenadas (3, 3). Puedes usar la fórmula para encontrar la distancia entre estas dos atracciones.

$$distancia = \sqrt{(3 - (-4))^2 + (3 - (-3))^2} = \sqrt{(7)^2 + (6)^2} = \sqrt{49 + 36} = \sqrt{85}$$

La fórmula que derivaste en la investigación se conoce como la **fórmula de la distancia.** Lee sobre esta fórmula en la página 614 de tu libro. Después lee los Ejemplos B y C. En el Ejemplo C se pone énfasis en la importancia de verificar tus soluciones cuando resuelves una ecuación con raíz cuadrada. Aquí se presenta otro ejemplo.

***EJEMPLO*** Resuelve la ecuación $\sqrt{2x - 5} = x - 4$.

▶ ***Solución***

| | |
|---|---|
| $\sqrt{2x - 5} = x - 4$ | Ecuación original. |
| $\left(\sqrt{2x - 5}\right)^2 = (x - 4)^2$ | Eleva ambos lados al cuadrado para deshacer la raíz cuadrada. |
| $2x - 5 = x^2 - 8x + 16$ | Resultado de elevar al cuadrado. |
| $0 = x^2 - 10x + 21$ | Suma $-2x$ y 5 a ambos lados. |
| $x = 3$ ó $x = 7$ | Usa la fórmula cuadrática, una gráfica, o una tabla para resolver. |

Verifica:

$\sqrt{2(3) - 5} = \sqrt{1} = 1$ y $3 - 4 = -1$, de modo que 3 *no* es una solución.

$\sqrt{2(7) - 5} = \sqrt{9} = 3$ y $7 - 4 = 3$, de modo que 7 es una solución.


©2004 Key Curriculum Press

LECCIÓN CONDENSADA

11.7

# Triángulos semejantes y funciones trigonométricas

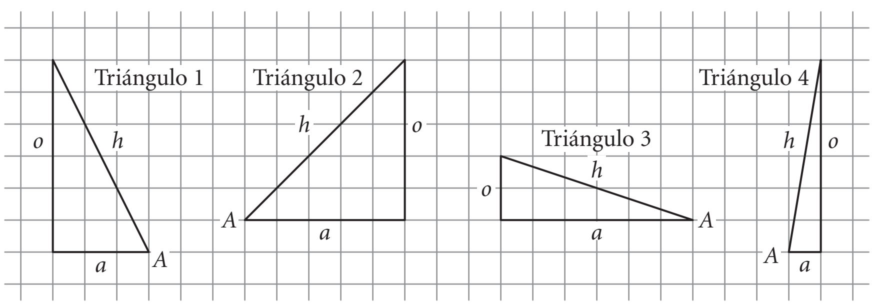
En esta lección

- resolverás una proporción para hallar las longitudes desconocidas de un lado en un par de triángulos semejantes
- identificarás los **catetos opuesto** y **adyacente** a un **ángulo agudo** de un triángulo rectángulo
- calcularás las razones **seno, coseno,** y **tangente** de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo

Sabes que los *polígonos semejantes* tienen lados correspondientes que son proporcionales. En el Ejemplo A de tu libro se revisa cómo encontrar la longitud desconocida de un lado en triángulos semejantes, resolviendo una proporción. Lee y sigue ese ejemplo. Después lee el texto que sucede el ejemplo.

## Investigación: Razón, razón, razón

A continuación se presentan cuatro triángulos rectángulos. En cada triángulo, el lado rotulado *o* es el cateto **opuesto** al ángulo *A* y el lado rotulado *a* es el cateto **adyacente** al ángulo *A*. El lado con rótulo *h* es la hipotenusa.




Para cada triángulo, encuentra la medida del ángulo *A*, y regístralo junto con las longitudes de los lados en una tabla. Dibuja dos o tres triángulos rectángulos más y agrega sus datos en la tabla. Aquí se presentan las mediciones para los triángulos anteriores.

| | Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 |
|---|---|---|---|---|
| Medida del ángulo *A* | 63° | 45° | 18° | 81° |
| Longitud del cateto adyacente (*a*) | 3 | 5 | 6 | 1 |
| Longitud del cateto opuesto (*o*) | 6 | 5 | 2 | 6 |
| Longitud de la hipotenusa (*h*) | $\sqrt{45} \approx 6.71$ | $\sqrt{50} \approx 7.07$ | $\sqrt{40} \approx 6.32$ | $\sqrt{37} \approx 6.08$ |

(continúa)


©2004 Key Curriculum Press

## Lección 11.7 • Triángulos semejantes y funciones trigonométricas (continuación)

Calcula las razones $\frac{o}{h}$, $\frac{a}{h}$, y $\frac{o}{a}$ para cada triángulo. Aquí se muestran los resultados para los mismos triángulos.

| | Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 |
|---|---|---|---|---|
| Medida del ángulo $A$ | 63° | 45° | 18° | 81° |
| $\frac{o}{h}$ | $\frac{6}{\sqrt{45}} \approx 0.89$ | $\frac{5}{\sqrt{50}} \approx 0.71$ | $\frac{2}{\sqrt{40}} \approx 0.32$ | $\frac{6}{\sqrt{37}} \approx 0.99$ |
| $\frac{a}{h}$ | $\frac{3}{\sqrt{45}} \approx 0.45$ | $\frac{5}{\sqrt{50}} \approx 0.71$ | $\frac{6}{\sqrt{40}} \approx 0.95$ | $\frac{1}{\sqrt{37}} \approx 0.16$ |
| $\frac{o}{a}$ | $\frac{6}{3} = 2$ | $\frac{5}{5} = 1$ | $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$ | $\frac{6}{1} = 6$ |

Ahora, con tu calculadora en el modo de grados, encuentra el seno, el coseno, y la tangente del ángulo $A$, y registra los resultados en la tabla. (Consulta **Calculator Note 11A** para aprender cómo manejar estas funciones en tu calculadora.) Aquí se presentan los resultados para estos triángulos.

| | Triángulo 1 | Triángulo 2 | Triángulo 3 | Triángulo 4 |
|---|---|---|---|---|
| Medida del ángulo $A$ | 63° | 45° | 18° | 81° |
| seno $A$ | 0.89 | 0.71 | 0.31 | 0.99 |
| coseno $A$ | 0.45 | 0.71 | 0.95 | 0.16 |
| tangente $A$ | 1.97 | 1 | 0.32 | 6.31 |

Estos resultados son aproximadamente iguales a las razones de la tabla anterior. Si hubieras medido los ángulos hasta la décima o la centésima de grado más cercana, los resultados estarían más ajustados. Las razones seno, coseno, y tangente (abreviadas sin, cos, y tan) se definen de la manera siguiente.

$$\sin A = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\textit{cateto adyacente}}{\textit{hipotenusa}} \qquad \tan A = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

Elige uno de los cuatro triángulos anteriores y dibuja un triángulo rectángulo más grande, con un ángulo agudo congruente al ángulo $A$. Rotula al ángulo congruente con $D$. Mide las longitudes laterales y calcula las razones seno, coseno, y tangente para el ángulo $D$. Debes encontrar que las razones son las mismas que las del triángulo original.

El seno, el coseno, y la tangente son conocidos como *funciones trigonométricas* y son fundamentales en la rama de las matemáticas conocida como *trigonometría*. Aprender a identificar las partes de un triángulo rectángulo y evaluar estas funciones para mediciones particulares de ángulos es una importante herramienta para resolver problemas. En el recuadro de la página 620 se repasa lo que has aprendido sobre estas funciones.

En el Ejemplo B de tu libro se muestra cómo hallar las razones seno, coseno, y tangente para ángulos particulares de un triángulo. Lee el Ejemplo B y después lee el ejemplo que se presenta a continuación.

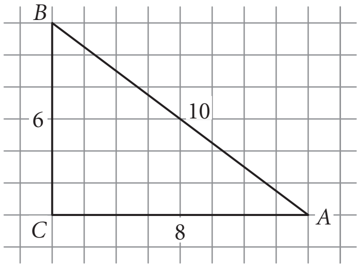
**(continúa)**


©2004 Key Curriculum Press

## Lección 11.7 • Triángulos semejantes y funciones trigonométricas (continuación)

***EJEMPLO*** Encuentra las razones para este triángulo.

**a.** cos A **b.** tan A **c.** cos B **d.** sin B




***Solución*** Para el ángulo $A$, $a = 8$, $o = 6$, y $h = 10$.

**a.** $\cos A = \frac{a}{h} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$ **b.** $\tan A = \frac{o}{a} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

Para el ángulo $B$, $a = 6$, $o = 8$, y $h = 10$.

**a.** $\cos B = \frac{a}{h} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ **b.** $\sin B = \frac{o}{h} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$


©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 162

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 163

LECCIÓN CONDENSADA

# 11.8 Trigonometría

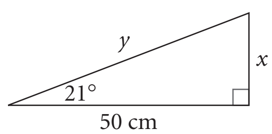
En esta lección

- usarás las **funciones trigonométricas** para hallar las longitudes laterales de un triángulo rectángulo
- usarás las **funciones trigonométricas inversas** para encontrar las medidas de los ángulos de un triángulo rectángulo
- usarás la trigonometría para ayudarte a interpretar un **mapa topográfico**

Si conoces la medida de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo y la longitud de un lado, puedes usar funciones trigonométricas para encontrar las longitudes de los otros lados. Si conoces las longitudes de los lados, puedes usar funciones trigonométricas inversas para hallar las medidas de los ángulos. Estas ideas se presentan en los Ejemplos A y B de tu libro. Aquí hay dos ejemplos más.

***EJEMPLO A***

Encuentra el valor $x$ en este triángulo.




**► *Solución***

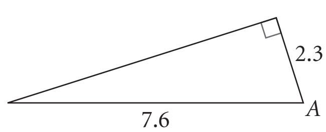
La variable $x$ representa la longitud del cateto opuesto al ángulo de 21°. La longitud del cateto adyacente es 50 cm.

| | |
|---|---|
| $\tan A = \dfrac{o}{a}$ | Definición de tangente. |
| $\tan 21° = \dfrac{x}{50}$ | Sustituye $A$ por 21° y $a$ por 50. |
| $50 \tan 21° = x$ | Multiplica ambos lados por 50. |
| $19.2 \approx x$ | Evalúa la función tangente y multiplica. |

La longitud de $x$ es aproximadamente 19.2 cm. Ahora, intenta hallar la longitud de $y$.

***EJEMPLO B***

Encuentra la medida del ángulo $A$.




**► *Solución***

Como conoces la longitud del cateto adyacente al ángulo $A$ y la longitud de la hipotenusa, puedes encontrar la razón coseno.

$$\cos A = \frac{2.3}{7.6} \approx 0.303$$

Puedes hallar la medida del ángulo con el coseno inverso de 0.303.

$$A = \cos^{-1}(0.303) \approx 72°$$

**(continúa)**


©2004 Key Curriculum Press

DACLS_676_11.qxd 1/21/04 5:45 PM Page 164

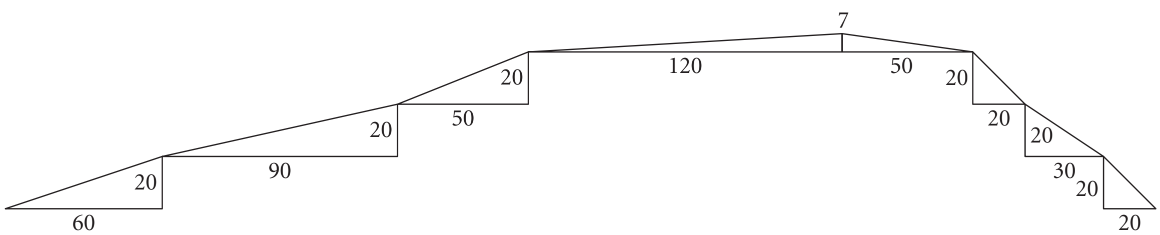


## Investigación: Lectura de mapas topográficos

El *mapa topográfico* en la página 627 de tu libro muestra la elevación de una colina. En el mapa, existe una subida vertical de 20 metros entre cada dos anillos o *curvas de nivel*. Estudia el mapa hasta que creas que lo entiendes.

Las curvas de nivel están más separadas en el lado occidental de la cumbre que en el lado oriental. Esto indica que la subida es más gradual si te acercas desde el lado occidental.

Supón que caminas desde el lado occidental, pasas sobre la cumbre, y bajas por el lado oriental. Las curvas de nivel y la cumbre dividen la excursión en 8 secciones. La pendiente de cada sección es la subida vertical (el cambio en elevación) dividido entre el recorrido horizontal (la distancia entre las curvas de nivel). Estos dibujos muestran un triángulo de pendiente para cada sección de la excursión.




Usa el teorema de Pitágoras para hallar la longitud de la hipotenusa de cada triángulo de pendiente. Esta longitud se aproxima a la distancia real recorrida en esa sección de la excursión. Aquí se ven los resultados.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sección 1: 63.2 m | Sección 2: 92.2 m | Sección 3: 53.9 m | Sección 4: 120.2 m |
| Sección 5: 50.5 m | Sección 6: 28.3 m | Sección 7: 36.1 m | Sección 8: 28.3 m |

Usa la función tangente inversa para hallar el ángulo de subida de cada sección. Por ejemplo, $\tan^{-1}\left(\frac{20}{65}\right)$ es el ángulo de subida para la sección 1.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Sección 1: 18° | Sección 2: 13° | Sección 3: 22° | Sección 4: 3° |
| Sección 5: 8° | Sección 6: 45° | Sección 7: 34° | Sección 8: 45° |

Mide cada ángulo y compara tus resultados con los anteriores.

Ahora lee el resto de la lección en tu libro.


©2004 Key Curriculum Press